



Escola Tècnica Superior d'Enginyers  
de Camins, Canals i Ports de Barcelona

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

## PROJECTE O TESINA D'ESPECIALITAT

### Títol

**ESTUDIO DEL REBASE DEL OLEAJE SOBRE DIQUES  
DE PUERTOS MEDIANTE EL PFEM**

**737-TES-CA-4779**

### Autor/a

**CARLOS MARIN MOYA**

### Tutor/a

**EUGENIO OÑATE IBAÑEZ DE NAVARRA**

### Departament

**737- Resistència de Materials i Estructures a l' Enginyeria**

### Intensificació

**Anàlisi i Projecte d' Estructures**

### Data

**2 de Julio de 2010**



## *AGRADECIMIENTOS*

---

Sólo tengo palabras de agradecimiento por la inestimable ayuda que he recibido por parte de Miguel Ángel Celigueta y a mi tutor, Eugenio Oñate, por permitirme realizar esta tesina.

También me gustaría agradecer a mi familia, mis amigos y a Marta su apoyo y comprensión en todo momento.



**TITULO: ESTUDIO DEL REBASE DEL OLEAJE SOBRE DIQUES DE PUERTOS MEDIANTE EL PFEM**

**AUTOR: CARLOS MARIN MOYA**

**TUTORES: EUGENIO OÑATE IBAÑEZ DE NAVARRA / MIGUEL ANGEL CELIGUETA**

El método de las partículas (PFEM) es el instrumento ideal para simular problemas relacionados con flujos incompresibles con superficie libre y estructuras flotantes o sumergidas. Problemas tales como la interacción fluido-estructura, las ondas de superficie o la separación de las gotas de agua pueden ser fácilmente resueltos con el PFEM.

El objetivo básico de esta tesina es analizar la fiabilidad del método en el estudio tridimensional del rebase del oleaje sobre un dique de un puerto real. Actualmente, resulta desconocido el rendimiento del PFEM en el análisis tridimensional de problemas de grandes dimensiones comunes en la ingeniería civil.

Para llevar a cabo dicha investigación, se ha ejecutado, en primer lugar, un caso que consiste en un escalón de agua. La comparativa entre el caso bidimensional y tridimensional indica el buen comportamiento en 3D cuando nos encontramos con una dimensiones geométricas pequeñas. Sin embargo, en el siguiente capítulo donde se analiza el rebase del oleaje sobre un dique, se demuestra la poca fiabilidad de los resultados. Un dominio de gran dimensión hace que los elementos que discretizan el problema sean de tamaño superior provocando unas oscilaciones en la superficie libre que alteran la calidad de los resultados. Una vez ejecutado el caso, se concluye que no es conveniente realizar simulaciones tridimensionales cuando nos encontramos en problemas de grandes dimensiones ya que el coste necesario es muy elevado.

Finalmente, este estudio consumará con la ejecución de un caso de escalón de agua con un obstáculo intermedio. Se comprobará la fiabilidad en los resultados cuando se trata de una simulación tridimensional en dominios pequeños.

Las conclusiones generales que podemos extraer de esta tesina es que el código del PFEM no resulta válido antes problemas que impliquen grandes dimensiones dado que el tamaño del elemento también crecerá provocando una inestabilidad en la superficie libre del fluido. La solución recae en la disminución del tamaño del mallado. No obstante, el coste computacional y temporal resulta tan elevado que no es conveniente llevarlo a cabo.

Por tanto, ante problemas de gran magnitud usaremos la simulación bidimensional mientras que en espacios de dimensiones más reducidas el modelo tridimensional será sinónimo de precisión y eficacia en los resultados.



**TITLE: SWELL OVERPASS STUDY OVER PORT DIKES USING THE PFEM**  
**AUTHOR: CARLOS MARIN MOYA**  
**TUTORS: EUGENIO OÑATE IBAÑEZ DE NAVARRA / MIGUEL ANGEL CELIGUETA**

The Particle Finite Element Method (PFEM) is an excellent numerical tool in order to simulate problems that have to do with incompressible flow and free surface, and floating or submerged structures. Problems such as fluid-structure interaction, surface waves, or separation of water drops can be easily solved with PFEM.

The main objective of this dissertation thesis is to analyze liability of the method, applied to a three-dimensional study of the swell overpass over a dike in the scenario of a real port. At the moment, the power of PFEM in three-dimensional analysis of big dimension problems common to civil engineering remains unknown.

To carry out this investigation, a water step has been considered in first place. Comparison between two-dimensional and three-dimensional scenario, shows good behavior of the three dimensions when we come across small geometrical dimensions. Although, in the next chapter, where swell overpass over a dike is analyzed, limited liability of the obtained results can be observed. A big dimension domain lays to a growth of the elements that discretize the problem, causing oscillations on the free surface which distort the accuracy of the results. Once this case has been executed, it is concluded that it is not recommended to carry out three-dimensional simulations when we come across big dimension problems because the cost would be very high.

Finally, this study will carry out the case execution of a water step with an intermediate obstacle. Liability of the results will be checked when a three-dimensional simulation in small domains appears.

General conclusions to be extracted from this dissertation thesis are that the PFEM is not valid when treating big dimensional problems because that entails the growth of the elements, which at the time generates instability on the fluids free surface. Solution relays on minimization of the meshing size. Anyhow, time and computational cost is so high, that it is not recommended.

Therefore, in front of big dimensional problems, the two-dimensional simulation will be used, while in smaller dimension domains three-dimensional model will lay to accuracy and efficiency in results.





# INDICE

---

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.....	Pág. 9
2. ANTECEDENTES DEL PFEM .....	Pág.10
2.1. Introducción .....	Pág.11
2.2. El Método de las Partículas .....	Pág.13
2.2.1. Pasos Básicos del PFEM .....	Pág.15
2.3. Actualización de la posición de las partículas.....	Pág.16
2.3.1. Ecuaciones de gobierno en formulación lagrangiana .....	Pág.16
2.3.2. Integración en el tiempo explícito – implícito.....	Pág.17
2.3.3. La división del tiempo .....	Pág.18
2.3.4. Generación de una nueva malla.....	Pág.20
2.3.5. Discretización espacial por el método de los elementos finitos Meshless (MFEM).....	Pág.20
2.3.6. Resumen de un paso de tiempo.....	Pág.24
2.3.7. Estabilización de la condición de incompresibilidad.....	Pág.25
2.4. Identificación de la superficie frontera. La técnica de Alpha Shape .....	Pág.26
2.5. Condición de contacto entre fluido y límite fijo.....	Pág.28
2.6. Resultados Numéricos .....	Pág.29
2.6.1. Colapso de una columna de agua.....	Pág.29
2.6.2. Problemas de vaivén .....	Pág.31
2.6.3. Ola rompiendo en la playa.....	Pág.33
2.6.4. Sólidos flotantes sobre una superficie libre .....	Pág.36
2.6.5. Cubo cayendo en un recipiente de agua.....	Pág.36
2.7. Conclusiones.....	Pág.39
3. ESTUDIO TRIDIMENSIONAL ESCALÓN DE AGUA .....	Pág.40
3.1. Introducción .....	Pág.40
3.2. Descripción del problema .....	Pág.41
3.3. Simulación bidimensional .....	Pág.43
3.3.1. Presentación de resultados .....	Pág.45
3.4. Simulación tridimensional.....	Pág.52
3.4.1. Presentación de resultados .....	Pág.54
3.5. Conclusiones .....	Pág.57

4. REBASE DEL OLAJE SOBRE UN DIQUE.....	Pág.59
4.1. Introducción .....	Pág.59
4.2. Descripción del problema.....	Pág.60
4.3. Simulación bidimensional del puerto.....	Pág.63
4.3.1. Presentación de resultados .....	Pág.66
4.4. Simulación tridimensional del puerto.....	Pág.67
4.4.1. Presentación de resultados .....	Pág.71
4.5. Comparativa del puerto en 2D y 3D .....	Pág.73
4.6. Mejora de la simulación del puerto.....	Pág.75
4.7. Conclusiones .....	Pág.79
 5. VALIDACIÓN DEL PFEM PARA PEQUEÑAS GEOMETRIAS: INTERACCION ESCALON DE AGUA - PARED.....	 Pág.80
5.1. Introducción .....	Pág.80
5.2. Descripción del problema.....	Pág.81
5.3. Simulación bidimensional.....	Pág.82
5.4. Simulación tridimensional.....	Pág.84
5.5. Comparativa entre el caso 2D y 3D .....	Pág.85
 6. CONCLUSIONES.....	 Pág.87
 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 Pág.89

# 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

---

El método de las partículas (PFEM) es la herramienta ideal para tratar problemas de interacción fluido-estructura dentro de un marco unificado de elementos finitos de Lagrange. El éxito del método radica en la solución precisa y eficiente de las ecuaciones de un fluido incompresible utilizando un método de elementos finitos estabilizados a través de un esquema de paso fraccionado.

PFEM discretiza el problema mediante un número finito de partículas que representan un punto material del continuo y que pueden desplazarse libremente en función de su propio peso y las fuerzas aplicadas en ellas.

El uso de un innovador procedimiento de regeneración de malla (partición de Delaunay) y la técnica Alpha Shape son otros de los ingredientes esenciales en el funcionamiento del PFEM.

El objetivo básico de este trabajo es analizar la fiabilidad del método en el estudio tridimensional del rebase del oleaje sobre un dique de un puerto real. Estudios anteriores demuestran que el caso bidimensional ha proporcionado resultados propicios al optimismo. Sin embargo, resulta desconocido el rendimiento del PFEM en el análisis tridimensional de problemas de grandes dimensiones comunes en la ingeniería civil.

El modo de procedimiento de dicho trabajo comenzará con un estudio a pequeña escala de un escalón de agua. El objetivo consiste en evaluar la similitud de los resultados obtenidos entre el caso 2D y 3D. De esta forma, podremos llevar a cabo una comparación para ver la fidelidad de los resultados del PFEM.

Posteriormente, se desarrolla el capítulo encargado de analizar la eficiencia del método en un dominio tridimensional de grandes dimensiones. El estudio consiste en realizar nuevamente una comparativa pero, en este caso, del rebase del oleaje sobre un dique de un puerto con una geometría real. Se mostrará un especial interés en la calidad de resultados en función del refinamiento de la malla utilizada.

Finalmente, se efectuará un caso similar al escalón de agua con la dificultad añadida de la existencia de un muro fijo que provoque la rotura de la ola generada por el escalón. Con este último capítulo, se pretende asegurar la fiabilidad del PFEM en 3D en problemas de dimensiones pequeñas.

De este modo, podremos alcanzar los objetivos fijados al iniciar este estudio y ser capaces de conocer las posibilidades que alcanza el método de las partículas.

## 2. ANTECEDENTES DEL PFEM

---

### Resumen

El método de las partículas es la herramienta ideal para tratar problemas relacionados con grandes movimientos de superficie libre de fluidos y la interacción con estructuras total o parcialmente sumergidas que interactúan entre sí.

El problema se presenta a través de un número finito de partículas que discretiza el dominio de análisis y representa un punto material del continuo. El PFEM trata los nodos como partículas que pueden desplazarse libremente en función de su propio peso y las fuerzas externas e internas aplicadas en ellas.

La formulación de las ecuaciones que rigen los sólidos y el dominio fluido se realiza mediante una descripción actualizada de Lagrange, cuya solución se basa en el Método de los Elementos Finitos (FEM) fundamentado en el enfoque del cálculo finito (FIC) que resolverá las ecuaciones de incompresibilidad de Navier-Stokes para evaluar las fuerzas externas. Como consecuencia, los términos de estabilización utilizados en las ecuaciones de movimiento son innecesarios debido a la falta de términos convectivos en la formulación de Lagrange.

Otro ingredientes esenciales de este método son la regeneración eficiente de la malla de elementos finitos en cada paso de tiempo usando una Tesselation Delaunay extendida, la Meshless interpolación de elementos finitos (MFEM) y la identificación de los nodos frontera mediante la técnica Alpha Shape.

De este modo, el método de las partículas proporciona una metodología de análisis general para tratar problemas tan complejos como la interacción fluido-estructura o rotura de olas de una manera sencilla y eficaz.

## 2.1. INTRODUCCIÓN

---

En las últimas dos décadas, la simulación computacional de los fluidos incompresibles se ha basado en la formulación Euleriana de las ecuaciones de la mecánica de fluidos en dominios continuos. Sin embargo, todavía resulta difícil analizar problemas en que la superficie de contacto cambie constantemente o en interacciones fluido-estructura con superficies libres donde hay problemas complicados en los contactos.

Más recientemente, el método de las partículas utiliza la forma Lagrangiana para definir el movimiento de las partículas de fluido [1-4]. Las primeras ideas de este enfoque fueron propuestas por Monaghan [1] para problemas de hidrodinámica astrofísica y fueron denominadas *Smooth Particle Hydrodynamics Method* (SPH). Este método fue generalizado a problemas de mecánica de fluidos [2-4]. Las aproximaciones de Kernel fueron utilizadas en el método SPH para interpolar lo desconocido.

Por otra parte, una familia de métodos llamados Métodos Meshless (sin malla) se ha desarrollado tanto para problemas estructurales [5-6] como de mecánica de fluidos [8 -10]. Todos estos métodos utilizan la idea de un polinomio interpolador que se adapte a una serie de puntos minimizando la distancia entre función interpolación y el valor del punto desconocido. Estas ideas fueron inicialmente propuestas por Nayroles et al. [7] y, posteriormente, usadas en mecánica estructural por Belytschko et al. [5] y en problemas de mecánica de fluidos por Oñate et al. [8-10].

En trabajos anteriores [11], los autores presentaron la solución numérica para las ecuaciones de la mecánica de fluidos utilizando una formulación Lagrangiana y un método meshless denominado *Finite Point Method* (FPM). Posteriormente, las ideas meshless (sin malla) fueron generalizadas para tener en cuenta las aproximaciones del tipo de elemento con el objeto de obtener el mismo tiempo de cálculo en la generación de la malla así como en la evaluación de las conectividades sin malla [12]. Este método fue llamado *Meshless Finite Element Method* (MFEM) y utiliza el mosaico extendido de Delaunay [13] para construir la malla en un tiempo de cálculo que sea lineal con el número de nodos.

Es preciso señalar que los métodos de las partículas puede utilizarse con ambas: con la malla o con la forma meshless (sin malla). La única limitación práctica es que las conectividades en métodos meshless o la generación de mallas en los métodos con malla tienen que evaluarse en cada paso de tiempo y, por tanto, no deben consumir excesivo tiempo de cálculo.

En este documento, el método de las partículas será utilizado como un caso particular de MEF. Para evaluar las fuerzas en cada partícula, la ecuación de incompresibilidad de Navier-Stokes, en un dominio continuo, se resolverá mediante las funciones de forma MFEM [12] en el espacio. Esas funciones se generan en un tiempo de cálculo de orden “n” siendo “n” el número de partículas. Desde el punto de vista del tiempo de cálculo, este es el mismo (o incluso mejor) que el tiempo de cálculo para evaluar las conectividades en un método meshless. Por otra parte, las funciones de forma propuestas por el MFEM presentan grandes ventajas en comparación con las obtenidas a través de un método meshless: todas las ventajas clásicas del MEF para

la evaluación de las integrales de las funciones desconocidas y sus derivadas se mantienen, incluyendo las facilidades para imponer las condiciones de contorno y el uso de aproximaciones geométricas de Galerkin. Pese al gran interés que han despertado los métodos meshless, lo cierto es que su aplicación se ha limitado a la solución de problemas académicos bidimensionales y, por tanto, su impacto en la industria ha sido todavía mínimo.

Las ecuaciones de flujo de fluidos Lagrangianos para la aproximación de Navier-Stokes serán revisadas en las siguientes secciones incluyendo un método implícito de paso fraccionado para el tiempo de integración. Por lo tanto, el método de las partículas propuesto será utilizado para resolver algunos problemas FSI para sólidos rígidos y flujos de fluidos incluyendo superficies libres y rotura de olas.

## *2.2. EL MÉTODO DE LAS PARTÍCULAS*

---

El método de las partículas es una técnica de gran potencial práctico que se basa en considerar el dominio de análisis formado por una colección de partículas. Cada partícula se mueve en relación a su propio peso y a las fuerzas externas e internas aplicadas en ella.

A diferencia del MEF, cada partícula representa un punto material del medio continuo y se le asigna unas propiedades que representa un promedio de la propiedad en torno a la posición de la partícula. Es decir, propiedades físicas como densidad o viscosidad, variables físicas como velocidad o presión y variables matemáticas como gradientes o deformaciones volumétricas se fijan a la propia partícula.

Mediante el uso de la formulación de Lagrange para formular las ecuaciones que rigen tanto los dominios líquidos como sólidos, el movimiento libre de las partículas individuales es seguido y, en consecuencia, los nodos de la malla de elementos finito puede ser visto como el traslado de los puntos materiales. Por lo tanto, el movimiento de la malla que discretiza el dominio total es seguido durante la solución transitoria. Esta característica ha dejado atrás dificultades típicas que se producían en el análisis de problemas FSI mediante la formulación de Euler, en la que incluía el tratamiento de los términos convectivos y la restricción de incompresibilidad de las ecuaciones de fluidos. Dicho motivo era el causante de, por ejemplo, una mala transferencia de información entre el líquido y los dominios sólidos en movimiento a través del contacto con las interfaces o la actualización eficiente de la malla de elementos finitos.

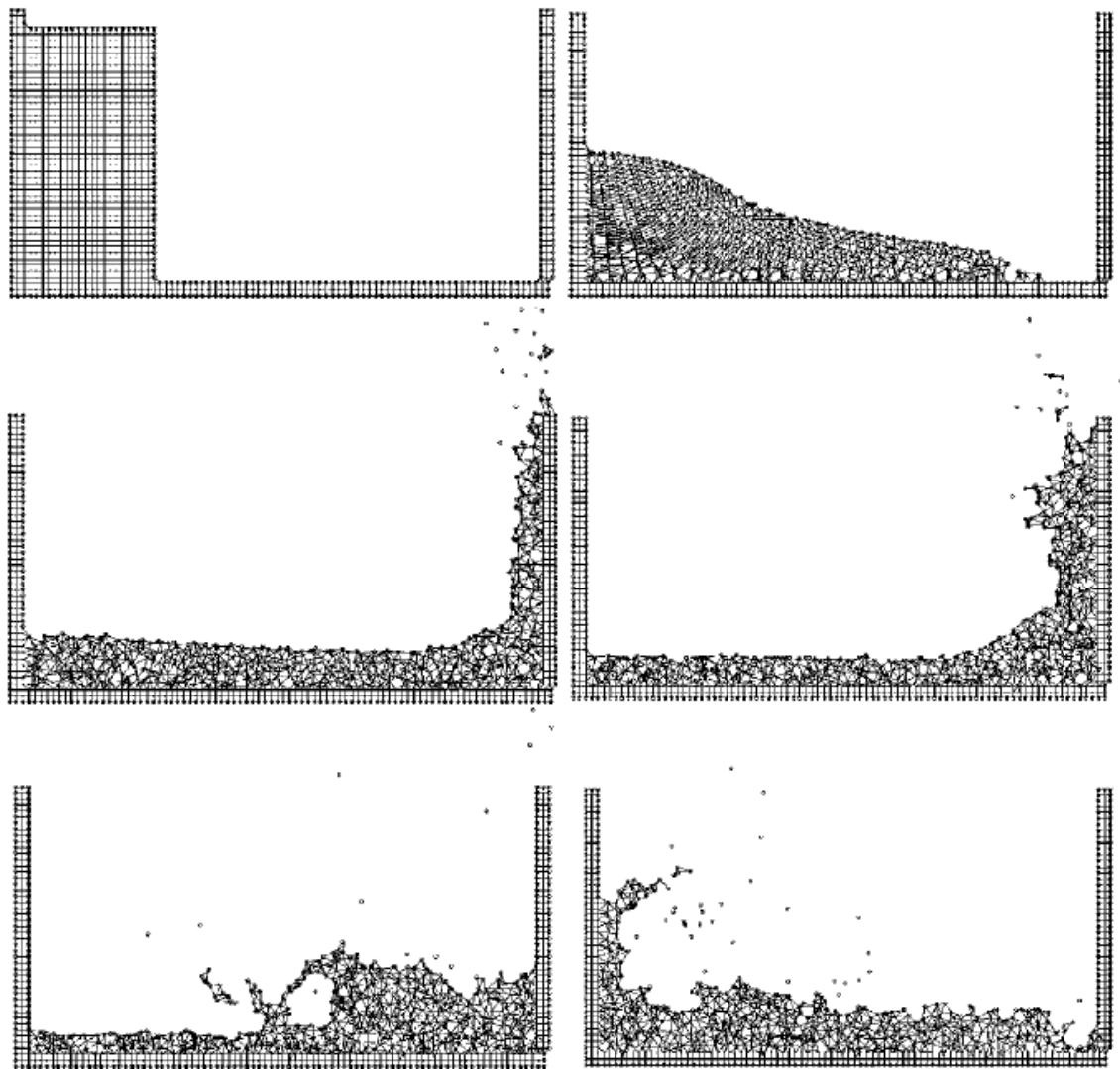
Los métodos de las partículas son ventajosos tanto para el tratamiento de problemas discretos como materiales granulares, como para el tratamiento de problemas continuos en que las partículas pueden desplazarse libremente e incluso separadas del dominio fluido principal que representen el efecto de las gotas de agua. Dicha situación puede producirse en problemas que incluyan superficies libres y roturas de olas.

La característica más importante del Método de las Partículas es que no existe un dominio de solución específico. El dominio del problema se define por la posición de las partículas, por lo que no hay una superficie o línea fronteriza. Ésta es la razón por la cual, cuando hay que resolver una ecuación diferencial con el fin de evaluar las fuerzas, los límites de superficie necesitan ser identificados con el fin de imponer las condiciones de contorno. Además, las partículas se pueden utilizar para generar un dominio discreto en el que se resuelven las ecuaciones diferenciales (ver Figura 2.1).

El Método de las Partículas se propone para hacer frente a las ecuaciones de incompresibilidad de Navier-Stokes. Entonces, el verdadero material será continuo e incompresible cuando se sometan a fuerzas de compresión, pero con la posibilidad de separarse bajo las fuerzas de tracción. Éste es el caso de la mayoría de los fluidos físicos, como el agua, los aceites y otros líquidos con baja tracción superficial.

Tanto el fluido como materiales sólidos son modelados por un número arbitrario de partículas. Sobre cada partícula las fuerzas actuantes serán la fuerza de la gravedad (fuerza interior de la partícula) y las fuerzas de interacción con las partículas vecinas (fuerza externa a la partícula). Las fuerzas externas se evaluarán con la solución de

las ecuaciones de Navier-Stokes. Por esta razón es necesario definir un dominio en cada paso de tiempo con una superficie frontera definida donde las condiciones de contorno serán impuestas. También en cada paso de tiempo se genera una nueva malla con el fin de definir funciones de forma para resolver las ecuaciones diferenciales. Esta malla sólo es útil para las definiciones de las fuerzas de interacción y se desvanece una vez que las fuerzas son evaluadas (ver figura 2.1). La interpolación de las funciones que deben utilizarse es un caso particular de las funciones de forma del Método de los Elemento Finitos. La superficie del contorno se define con la técnica Alpha-Shape que se explica en el apartado 4. La evaluación de la interacción de fuerzas entre las partículas se describe a continuación.



**Figura 2.1.** Reconocimiento de las condiciones de contorno y actualización de la malla en cada paso de tiempo.



## 2.2.1 PASOS BÁSICOS DEL PFEM

---

Vamos a considerar un dominio que contenga tanto dominios líquidos como sólidos. Las partículas del fluido en movimiento interactúan con los límites sólidos, induciendo a la deformación de éstos que, a su vez, afecta el movimiento del flujo. Por tanto, tenemos el problema totalmente acoplado.

En el PFEM, los dominios son modelados usando una formulación actualizada de Lagrange donde todas las variables se suponen conocidas en la configuración actual de tiempo  $t$ . El método de elementos finitos (FEM) se utilizará para resolver las ecuaciones de continuidad en ambos dominios.

Para efectos de claridad, vamos a definir una nube de nodos (C) correspondientes a los dominios sólidos y líquidos, un volumen (V) que define el dominio de análisis para el líquido y el sólido y una malla (M) que discretiza ambos dominios.

Una solución típica con el uso del PFEM implica los siguientes pasos:

1. El punto de partida en cada paso de tiempo es la nube de puntos que discretiza los dominios de líquidos y sólidos.
2. Identificar los límites definiendo el dominio de análisis en el líquido y sólido. Este es un paso fundamental ya que algunos límites (tales como la superficie libre en los líquidos) pueden verse gravemente distorsionados durante el proceso de solución como la separación y el reintegro de los nodos. El método Alpha-Shape [14] es utilizado para la definición de los límites (véase apartado 4).
3. Discretizar los dominios con una malla de elementos finitos. En este trabajo se utiliza un sistema innovador de generación de mallas basadas en el Tesselation Delaunay extendido (véase apartado 3.4) [15-17].
4. Resolver las ecuaciones de Lagrange de movimiento tanto para el dominio sólido como líquido. Calcular las variables de estado relevantes en ambos dominios en la siguiente (actualizada) configuración para  $t + \Delta t$ : velocidades, presión y fuerzas viscosas en el fluido y desplazamientos, presiones y deformaciones en el sólido.
5. Mover los nodos de la malla a una nueva posición en función del tamaño de incremento de tiempo. Este paso suele ser una consecuencia del proceso de solución del paso 4.
6. Generar una nueva malla en caso necesario. El proceso de regeneración de malla puede tener lugar después de un número determinado de pasos de tiempo o cuando la malla actual ha sufrido graves distorsiones debido al movimiento de Lagrange.
7. Volver al paso 1 y repetir el proceso de solución para el siguiente paso de tiempo.

## 2.3. ACTUALIZACIÓN DE LA POSICIÓN DE LAS PARTÍCULAS

La posición de las partículas será actualizada mediante la resolución de la formulación lagrangiana de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Vamos a considerar  $X_i$  la posición inicial de una partícula en el tiempo  $t^n$ ,  $x_i$  la posición final de la misma en el tiempo  $t^{n+1}$ , el incremento de tiempo  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  y  $u_i(x, t^{n+1}) = u_i^{n+1}$  la velocidad de la partícula en el tiempo  $t^{n+1}$ . Por tanto, la posición final puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$x_i = X_i + u_i^{n+1} \Delta t$$

De igual modo, el desplazamiento de la partícula  $d_i(x, t^{n+1}) = d_i^{n+1} = u_i^{n+1} \Delta t$

### 2.3.1 ECUACIONES DE GOBIERNO EN FORMULACIÓN LAGRANGIANA

En la posición final  $x_i$ , las ecuaciones de conservación de masa y momentum pueden escribirse como:

Conservación de la masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad [1]$$

Conservación del momentum:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho f_i \quad [2]$$

Donde  $\rho$  es la densidad,  $u_i$  son las componentes cartesianas de la velocidad,  $p$  la presión,  $\tau_{ij}$  el tensor desviador de tensión,  $f_i$  el término de fuerzas exteriores (normalmente la gravedad) y  $D\phi/Dt$  representa la derivada total o material de la función  $\phi$ .

Para fluidos newtonianos, el tensor de tensiones  $\tau_{ij}$  se expresa como una función del campo de velocidades y de la viscosidad  $\mu$  tal que:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \quad [3]$$

Para fluidos incompresibles cercanos  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \ll \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$  el término:  $\frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \approx 0$  (4) y debe ser sustituido en la ecuación (3). Entonces:  $\tau_{ij} \approx \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  (5)

Del mismo modo, el término  $\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$  de las ecuaciones de momentum será amplificado para fluidos lentos incompresibles como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \\ &\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \approx \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)\end{aligned}\quad [6]$$

De este modo, las ecuaciones de momentum pueden ser finalmente escritas como:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho f_i \approx -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i \quad [7]$$

### Condiciones de Contorno:

En el contorno, las condiciones para las ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\tau_{ij} v_j - p v_i = \sigma_{ni} \quad \text{en } \Gamma_\sigma$$

$$u_i v_i = u_n \quad \text{en } \Gamma_n$$

$$u_i \zeta_i = u_t \quad \text{en } \Gamma_t$$

Donde  $v_i$  y  $\zeta_i$  son las componentes de la normal y del vector tangente al contorno.

### 2.3.2 INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO EXPLÍCITO-IMPLÍCITO

La ecuación (7) debe ser integrada en el tiempo como:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} \approx \rho \frac{u_i(x_i, t^{n+1}) - u_i(x_i, t^n)}{\Delta t} = \rho \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i \right]^{n+\theta} \quad [8]$$

Donde  $[\phi(x, t)]^{n+\theta}$  significa  $\theta \phi(x, t^{n+1}) + (1 - \theta) \phi(x, t^n) = \theta \phi^{n+1} + (1 - \theta) \phi^n$  y  $\phi^n = \phi(x, t^n)$  representa el valor de la función en el tiempo  $t^n$  pero en el final de la posición  $x$ .

Solo en el caso de  $\theta = 1$  (totalmente implícito) será considerado a continuación, pero otro caso como  $\theta = 1/2$ , debería ser añadido sin considerar mayores cambios.

Entonces, el tiempo de integración de las ecuaciones es:

$$\rho \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} p \right]^{n+1} + \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i \right]^{n+1} \quad [9]$$

La conservación de masa es también implícitamente integrada de esta forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} \approx \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = -\rho^{n+1} \frac{\partial(u_i^{n+1})}{\partial x_i} \quad [10]$$

### 2.3.3 LA DIVISIÓN DEL TIEMPO

El tiempo de integración de la ecuación (9) presenta algunas dificultades porque se trata de una ecuación doble, con cuatro grados de libertad por nodo. Cuando el fluido es incompresible o casi incompresible puede haber varias ventajas por el hecho de que en la ecuación (9) las tres componentes de la velocidad sólo están unidas por la presión. Ha sido propuesto un paso fraccional del método [18], que consiste en dividir cada paso en dos pseudo – pasos. En la primera etapa, la parte implícita de la presión se evita con el fin de tener una ecuación disociada en cada una de las componentes de la velocidad. La parte implícita de la presión se añade durante un segundo paso. El paso de fracciones del algoritmo es:

División de las ecuaciones de momentum:

$$\frac{Du_i}{Dt} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^* + u_i^* - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p^{n+1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^{n+\theta}}{\partial x_j} + f_i \quad [11]$$

Donde  $u_i^*$  es una variable ficticia definida por la división de velocidades:

$$A) \quad u_i^* = u_i^n + f_i \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \hat{p}^n + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^{n+\theta} \quad [12]$$

$$C) \quad u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma \hat{p}^n) \quad [13]$$

En los cuales  $\hat{p}^n = p(x, t^n)$  es el valor de la presión en el tiempo  $t^n$  pero evaluado en la posición final y  $f_i$  es considerado constante en el tiempo.

En las ecuaciones (12) y (13),  $\gamma$  es el parámetro que proporciona la cantidad de presión, variando entre 0 y 1. Un valor mayor de  $\gamma$  significa una presión más pequeña. En este sentido,  $\gamma$  será fijada en 0 para tener una mayor presión y, consecuentemente, una mejora de su estabilización. Otros valores como, por ejemplo,  $\gamma = 1$  deben ser utilizados para obtener un mayor orden en el tiempo [18].

Teniendo esto en cuenta (6), el último término en (12) debe ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^{n+\theta} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) = \mu(1 - \theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^n}{\partial x_j} \right) + \mu\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_j} \right)$$

Las siguientes aproximaciones han sido introducidas en ref. [18]:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) \approx \mu(1 - \theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^n}{\partial x_j} \right) + \mu\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right)$$

Esto permite escribir la ecuación (12) como:

$$u_i^* = u_i^n + f_i \Delta t - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \hat{p}^n + \frac{\Delta t}{\rho} \mu(1 - \theta) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \hat{u}_i^n}{\partial x_j} \right) + \frac{\Delta t}{\rho} \mu\theta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right)$$

Para  $\gamma = 1$  y  $\theta = 1$ :

$$u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) = u_i^n + f_i \Delta t$$

### Ecuaciones parciales de conservación de masa

$$\frac{D\rho}{Dt} \approx \frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t} = \frac{\rho^{n+1}-\rho^*+\rho^*-\rho^n}{\Delta t} = -\rho \frac{\partial(u_i^{n+1}-u_i^*+u_i^*)}{\partial x_i} \quad [14]$$

Donde  $\rho^*$  es una variable ficticia definida por la siguiente ecuación parcial:

$$\frac{\rho^*-\rho^n}{\Delta t} = -\rho \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad [15]$$

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^*}{\Delta t} = -\rho \frac{\partial(u_i^{n+1}-u_i^*)}{\partial x_i} \quad [16]$$

### Ecuaciones dobles

Para las ecuaciones (13) y (16), la ecuación doble masa-momentum se convierte:

$$B) \quad \frac{\rho^{n+1}-\rho^*}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p^{n+1}) \quad [17]$$

Teniendo en cuenta la ecuación (15), la anterior expresión puede ser escrita como:

$$\frac{\rho^{n+1}-\rho^n}{\Delta t^2} + \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p^{n+1}) \quad [18]$$

En la ecuación (18), la condición de incompresibilidad no puede ser introducida todavía. La forma más fácil de introducir la condición de incompresibilidad en una formulación lagrangiana es la siguiente:

$$\rho^{n+1} = \rho^n = \rho^0 = \rho \quad [19]$$

Entonces, el primer término de la ecuación (18) desaparece, resultando

$$\frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p^{n+1})$$

El método fraccional de tres pasos puede ser resumido como:

$$A) \quad u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) = u_i^n + f_i \Delta t \quad \Rightarrow \quad u_i^*$$

$$B) \quad \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p^{n+1}) \quad \Rightarrow \quad p^{n+1} \quad [20]$$

$$C) \quad u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1}) \quad \Rightarrow \quad u_i^{n+1}$$

### 2.3.4 GENERACIÓN DE UNA NUEVA MALLA

---

Uno de los puntos clave para el éxito del PFEM es la rápida regeneración de la malla en cada paso de tiempo sobre la base de la posición de los nodos en el ámbito espacial. La malla se regenera usando el denominado Extended Delaunay Tesselation (EDT) presentado en [Idelsohn et al. (2003a; 2003c; 2004)]. El EDT permite generar mallas no estándar que combina elementos de formas poliédricas arbitrarias (triángulos, cuadriláteros y otros polígonos en 2D y tetraedros, hexaedros y poliedros arbitrarios en 3D) en un tiempo de cálculo de orden  $n$ , donde  $n$  es el número total de nodos que conforman la malla.

Una vez se ha generado la nueva malla, la solución numérica se halla en cada paso de tiempo con el algoritmo de paso fraccional descrito anteriormente. A raíz de problemas resueltos mediante el PFEM, se observa que el tiempo de la CPU crece linealmente con el número de nodos. Como regla general, para los grandes problemas de mallas 3D, se consume alrededor del 30% del tiempo total de la CPU para cada paso de tiempo, mientras que la solución de las ecuaciones y el montaje del sistema consumen aproximadamente un 40% y un 20% del tiempo total para cada intervalo de tiempo, respectivamente.

Estas cifras demuestran que la generación de la malla tiene un coste aceptable mientras que la combinación de elementos con diferentes formas geométricas en la misma malla es uno de los aspectos más innovadores de la formulación de Lagrange.

### 2.3.5 DISCRETIZACIÓN ESPACIAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS MESHLESS (MFEM)

---

Las funciones desconocidas se aproximan utilizando una interpolación del mismo orden para todas las variables en la configuración final

$$u_i = \sum_l N_l(X, t) U_{il}$$

$$p = \sum_l N_l(X, t) P_l$$

En forma matricial

$$u_i = N^T(X, t) U_i$$

$$p = N^T(X, t) P$$

O de forma más compacta

$$u_i = N_i^T U = \begin{bmatrix} N^T & & \\ & N^T & \\ & & N^T \end{bmatrix} U \quad [22]$$

Donde  $N^T$  son las funciones de forma del MFEM y  $U$  y  $P$  son los valores nodales de los tres componentes de las velocidades desconocidas y de la presión, respectivamente.

Debe mencionarse que las funciones de forma  $N(X, t)$  son funciones de las coordenadas de las partículas. Entonces, las funciones de forma deben cambiar en el tiempo con el seguimiento de la posición de las partículas. Durante el paso de tiempo, una malla actualizada debe introducir cambios en la definición de las funciones de forma y se han de tener en cuenta. Durante el tiempo de integración están involucrados dos tiempos:  $t^n$  y  $t^{n+1}$ . La siguiente notación será utilizada para distinguir entre  $N(X, t^n)$  y  $N(X, t^{n+1})$ :

$$N(X, t^n) = N^n \quad \text{y} \quad N(X, t^{n+1}) = N^{n+1}$$

No obstante, deben ser introducidas las siguientes hipótesis: no hay actualización de la malla en cada paso de tiempo. Esto significa que si la actualización de la malla es introducida en el inicio de cada paso de tiempo, la misma malla (pero deformada) se mantendrá hasta el final del paso de tiempo.

Matemáticamente, significa que:

$$N(X, t^n) = N(X, t^{n+1})$$

Desafortunadamente, estas hipótesis no siempre satisfacen todas las mallas por lo que conlleva pequeños errores en el cálculo que se desprecian.

Utilizando el método de pesos de Galerkin para resolver las ecuaciones parciales, se escriben las siguientes integrales:

$$(A) \int_V N_i u_i^* dV \frac{\rho}{\Delta t} - \int_V N_i u_i^n dV \frac{\rho}{\Delta t} - \int_V N_i f_i \rho dV + \int_V N_i \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma p^n dV - \int_V N_i \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i^{n+\theta}}{\partial x_j} \right) dV - \int_{\Gamma_\sigma} N_i \left( \bar{\sigma}_{ni} - (\tau_{ij}^{n+\theta} v_j - \gamma p^n v_i) \right) d\Gamma = 0 \quad [25]$$

$$(B) \int_V N \left\{ \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (p^{n+1} - \gamma p^n) \right\} dV + \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Gamma_u} N (\bar{u}_i^{n+1} v_i - u_i^{n+1} v_i) d\Gamma = 0 \quad [26]$$

$$(C) \int_V N_i (u_i^{n+1} - u_i^*) \frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma p^n) dV - \int_{\Gamma_\sigma} N_i (p^{n+1} - \gamma p^n) v_i d\Gamma = 0 \quad [27]$$

Las condiciones de contorno deben estar, también, divididas donde  $V$  es el volumen en el instante de tiempo  $t^{n+1}$ .

Integrando algunas partes de los términos, las ecuaciones descritas anteriormente se transforman de la siguiente manera:

$$(A) \int_V N_i (u_i^* - f_i \Delta t) \frac{\rho}{\Delta t} dV - \int_V N_i u_i^n \frac{\rho}{\Delta t} dV + \int_V N_i \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma p^n dV + \mu \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^{n+\theta}}{\partial x_j} dV - \int_{\Gamma_\sigma} N_i (\bar{\sigma}_{ni} + (\gamma p^n v_i)) d\Gamma = 0 \quad [28]$$

$$(B) -\frac{\rho}{\Delta t} \int_V \frac{\partial N}{\partial x_i} u_i^* dV - \int_V \frac{\partial N}{\partial x_i} \frac{\partial (p^{n+1} - \gamma p^n)}{\partial x_i} dV + \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Gamma_u} N_p (\bar{u}_i^{n+1}) d\Gamma = 0 \quad [29]$$

$$(C) \int_V N_i (u_i^{n+1} - u_i^*) \frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - \gamma \hat{p}^n) dV - \int_{\Gamma_\sigma} N_i (p^{n+1} - \gamma \hat{p}^n) d\Gamma = 0 \quad [30]$$

Debe mencionarse que las condiciones de contorno esenciales y naturales de las ecuaciones (29) son:

$$p = 0 \text{ en } \Gamma_\sigma \quad [31]$$

$$\bar{u}_i^{n+1} \cdot \nu = 0 \quad [32]$$

### Ecuaciones discretas

Utilizando las aproximaciones (22), (23) y (24), las ecuaciones discretas se escriben como:

$$(A) \int_V N_i N_i^T dV U_i^* = \int_V N_i N_i^T dV U_i^n + \Delta t \int_V N_i f_i dV - \frac{\gamma \Delta t}{\rho} \int_V N_i \frac{\partial N_i^T}{\partial x_i} dV P^n - \frac{\Delta t \mu}{\rho} \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N_i^T}{\partial x_j} dV U_i^{n+\theta} + \frac{\Delta t}{\rho} \int_{\Gamma_\sigma} N_i (\bar{\sigma}_{ni} + (\gamma P^n)) d\Gamma = 0 \quad [33]$$

Expresando la anterior expresión de forma compacta:

$$MU^* = MU^n + \Delta t F - \frac{\gamma \Delta t}{\rho} B^T P^n - \frac{\Delta t \mu}{\rho} K U^{n+\theta}$$

Haciendo uso de la aproximación descrita anteriormente para  $U^{n+\theta}$ :

$$\left( M + \frac{\Delta t \mu \theta}{\rho} K \right) U^* = MU^n + \Delta t F - \frac{\gamma \Delta t}{\rho} B^T P^n - \frac{\Delta t \mu (1 - \theta)}{\rho} K U^n$$

Para  $\theta = 1$  y  $\gamma = 0$ :

$(A) \quad \left( M + \frac{\Delta t \mu}{\rho} K \right) U^* = MU^n + \Delta t F \quad [34]$
---

En el mismo sentido:

$$-\frac{\rho}{\Delta t} \int_V \frac{\partial N}{\partial x_i} N_i^T dV U^* + \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Gamma_u} N_p (\bar{u}_i^{n+1}) d\Gamma = - \int_V \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \frac{\partial N_i^T}{\partial x_j} dV (P^{n+1} - \gamma P^n) \quad [35]$$

De forma compacta:

$$S P^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} (B U^* - \hat{U}) + S_\gamma P^n$$



Y para  $\theta = 1$  y  $\gamma = 0$ :

$$(B) \quad S P^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} (B U^* - \hat{U}) \quad [36]$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \int_V N_i N_i^T dV U_i^{n+1} &= \int_V N_i N_i^T dV U_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \int_V N_i \frac{\partial N^T}{\partial x_i} dV (P^{n+1} - \gamma P^n) + \\ &\int_{\Gamma_\sigma} N_i N_i^T d\Gamma (P^{n+1} - \gamma P^n) \end{aligned} \quad [37]$$

De forma compacta:

$$M U^{n+1} = M U^* - \frac{\Delta t}{\rho} B^T (P^{n+1} - \gamma P^n)$$

Y para  $\theta = 1$  y  $\gamma = 0$ :

$$(C) \quad M U^{n+1} = M U^* - \frac{\Delta t}{\rho} B^T (P^{n+1}) \quad [38]$$

Donde las matrices son:

$$M = \begin{bmatrix} M_P & & \\ & M_P & \\ & & M_P \end{bmatrix} \quad [39]$$

$$M_P = \int_V N N^T dV \quad [40]$$

$$B = \left[ \int_V \left( \frac{\partial N}{\partial x} N^T \right) dV; \int_V \left( \frac{\partial N}{\partial y} N^T \right) dV; \int_V \left( \frac{\partial N}{\partial z} N^T \right) dV \right] \quad [41]$$

$$S = \int_V \left( \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N^T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N^T}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial N^T}{\partial z} \right) dV \quad [42]$$

$$\hat{U} = \int_{\Gamma_u} N \bar{u}_i^{n+1} d\Gamma \quad [43]$$

$$K = \begin{bmatrix} S & & \\ & S & \\ & & S \end{bmatrix} \quad [44]$$

$$\begin{aligned} F^T &= \left[ \int_V N^T f_x dV; \int_V N^T f_y dV; \int_V N^T f_z dV \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \int_{\Gamma_\sigma} N^T \bar{\sigma}_{nx} d\Gamma; \int_{\Gamma_\sigma} N^T \bar{\sigma}_{ny} d\Gamma; \int_{\Gamma_\sigma} N^T \bar{\sigma}_{nz} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad [45]$$

### 2.3.6 RESUMEN DE UN PASO DE TIEMPO

---

Un paso de tiempo ha de ser descrito de la siguiente manera: se empieza con los valores conocidos  $u^n$  y  $p^n$  en cada partícula, el cálculo de la nueva posición de la partícula implica los siguientes pasos:

- 
- (I) Se aproxima  $u^{n+1}$  (Para la primera iteración  $u^{n+1} = 0$ . Para las siguientes iteraciones, el valor de  $u^{n+1}$  corresponderá a la última iteración dada.
  - (II) Movimiento de las partículas a la posición  $x^{n+1}$  y generación de una malla.
  - (III) Evaluación de la velocidad  $u^*$  desde (34). (Debe mencionarse que las matrices  $M$  y  $K$  están separadas en 3 bloques. Por tanto, las ecuaciones han de ser resueltas de forma separada para  $U_x^*$ ,  $U_y^*$  y  $U_z^*$ . Para  $\theta \neq 0$  (implícito) incluye la solución de las tres ecuaciones Laplacianas. Para  $\theta = 0$  (explícito), la matriz  $M$  debe ser diagonalizada e invertida directamente).
  - (IV) Evaluación de la presión  $p^{n+1}$  mediante la resolución de la ecuación Laplaciana (36).
  - (V) Evaluación de la velocidad  $u^{n+1}$  utilizando (38). Volver a (I) hasta obtener la convergencia.
- 

El esquema descrito de la división de Lagrange tiene dos importantes ventajas:

- (1) El paso III es lineal y puede ser explícito ( $\theta = 0$ ) o implícito ( $\theta \neq 0$ ). El uso de la formulación de Lagrange elimina los términos convectivos estándar presentes en las formulaciones Eulerianas. Los términos convectivos son los responsables de la no linealidad, la falta de simetría y de operadores auto adjuntos que requieren la introducción de términos de alto orden de estabilización para evitar oscilaciones numéricas. Todos estos problemas no son presentes en esta formulación. Sólo la no linealidad se mantiene debido al desconocimiento de la posición final de las partículas.
- (2) En todos los pasos, el sistema de ecuaciones a resolver es la evaluación de las componentes de la velocidad (paso III) y la evaluación de la presión (paso IV). Estos sistemas son escalares (un grado de libertad por nodo), simétricos y definidos positivos. Por lo tanto, es muy fácil de resolver mediante un esquema iterativo simétrico (Gradientes Conjugados).

### *2.3.7 ESTABILIZACIÓN DE LA CONDICIÓN DE INCOMPRESIBILIDAD*

---

En la formulación de Euler de las ecuaciones de momentum, la forma discreta debe ser estabilizada con el fin de evitar oscilaciones numéricas en los resultados de velocidad y presión. Sin embargo, esto no ocurre en la formulación de Lagrange, donde los términos de no estabilización han de ser añadidos en la ecuación (38). A pesar de todo, la condición de incompresibilidad debe estabilizarse con aproximaciones del mismo orden para evitar oscilación de presión en algunos casos particulares.

Por ejemplo, para presiones parciales pequeñas ( $\gamma \neq 0$ ) o para pequeños incrementos de paso de tiempo (número de Courant mucho más pequeño a la unidad) es bien sabido que el paso fraccionado no estabiliza las ondas de presión. En estos casos particulares, un término de estabilización ha de ser introducido en la ecuación (38) con el fin de eliminar las oscilaciones de presión [20].

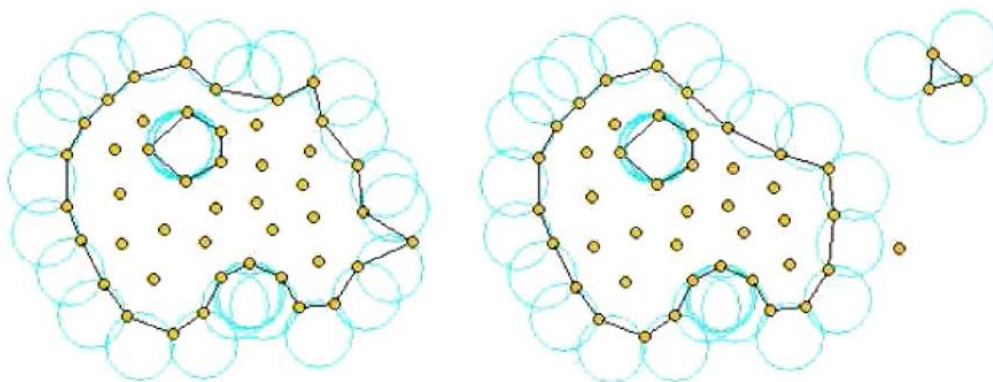
Sin embargo, el parámetro  $\gamma$  suele fijarse siempre igual a cero y los incrementos de tiempo se fijan con el número de Courant igual a la unidad, evitando así todos los problemas de inestabilidad.

## 2.4. IDENTIFICACIÓN DE LA SUPERFICIE FRONTERA. LA TÉCNICA DE ALPHA SHAPE

Una de las principales tareas en el PFEM es la correcta definición de los límites del dominio para la generación de una malla adecuada. Los nodos frontera son, a veces, explícitamente definidos como nodos especiales, que son diferentes de los nodos internos. En este estudio, el interés se centra en los problemas donde el dominio de la solución es muy distorsionado, y elementos de contorno pueden cambiar entre cada paso de tiempo. En este caso, un eficaz algoritmo de reconocimiento de límites es obligatorio a fin de imponer condiciones de frontera en los elementos adecuados, evitando así la acumulación de un posible error en el tiempo.

En este estudio utilizamos una extensión de particiones Delaunay para el reconocimiento de los nodos frontera. Teniendo en cuenta que los nodos siguen una distribución variable  $h(x)$ , donde  $h(x)$  es la distancia mínima normal entre dos nodos, se ha usado el siguiente criterio. Todos los nodos de una esfera vacía con un radio mayor a  $\alpha h$ , son considerados como los nodos frontera. En este criterio,  $\alpha$  es un parámetro a determinar, pero superior a la unidad. Los valores de  $\alpha$  comprendidos entre 1.3 y 1.5 son los óptimos para todos los estudios analizados. Este criterio es coincidente con la técnica Alpha Shape [14].

Una vez se ha decidido qué nodos se encuentran sobre el límite, la superficie frontera queda definida por superficies poliédricas (o polígonos en 2D) con todos sus nodos en la superficie y perteneciendo a un solo poliedro.



**Figura 2.2.** Identificación de partículas individuales (o grupo de partículas) partiendo de una colección de nodos dada.

El método descrito también permite identificar las partículas de fluido aisladas fuera del dominio del fluido principal. Estas partículas son tratadas como parte de la frontera externa donde el valor de la presión es el de la atmósfera. Hemos de recordar que cada partícula es un punto material caracterizado por la densidad del dominio sólido o fluido al cual pertenece. La masa que se pierde cuando un elemento frontera es eliminado debido a la salida de un nodo (una partícula) del dominio de análisis

principal se recupera cuando un nodo “volador” se cae y un nuevo elemento frontera es creado mediante el algoritmo Alpha Shape.

El método de reconocimiento de límites descrito anteriormente también es útil para detectar las condiciones de contacto entre el dominio fluido y un límite fijo, así como diferentes sólidos que interactúan los unos con los otros. Dicho procedimiento de detección de contacto se detalla en el apartado 2.5.

### *2.5. CONDICIÓN DE CONTACTO ENTRE FLUIDO Y LÍMITE FIJO*

---

El movimiento de los sólidos se rige por la acción de las fuerzas de flujo de fluidos inducida por la presión y las tensiones viscosas que actúan en la frontera común, donde incide el dominio fluido en el dominio sólido.

La condición de las velocidades prescritas en los límites fijados en el PFEM se aplica a los nodos frontera. Estos nodos pueden pertenecer a límites externos fijos o al traslado de los límites relacionados con la interacción de sólidos. El contacto entre las partículas del fluido y los límites fijados se explica por la condición de incompresibilidad que, naturalmente, impide que los nodos del fluido penetren en los límites del sólido. Esta simple forma de tratar el contacto líquido-pared a nivel de generación de malla es una característica distintiva y atractiva de la formulación PFEM.

## 2.6. RESULTADOS NUMÉRICOS

---

A continuación se presentan un conjunto de problemas acerca del flujo de superficie libre e interacción fluido - estructura. En un primer grupo de ejemplos el sólido será considerado infinitamente rígido y fijo. Dichos casos son útiles para comparar los resultados con los experimentales y analíticos. El sólido es representado mediante partículas pero con la velocidad impuesta igual a cero. En un segundo grupo de ejemplos se consideraran los sólidos rígidos en movimiento. En todos los casos, las tensiones elásticas serán despreciadas. El sólido será considerado de dos maneras diferentes:

- (a) Como un material particular con un parámetro de alta viscosidad, muy superior respecto al dominio fluido. A efectos prácticos, será considerado un valor de  $10^{10}\mu$  que es suficiente para representar un sólido sin introducir problemas numéricos.
- (b) El sólido será considerado como un límite de contorno con una velocidad impuesta. Después de cada paso de tiempo, se evaluarán las fuerzas del fluido (presión y viscosidad) en el sólido. En el siguiente paso, el sólido rígido se moverá mediante la Ley de Newton.

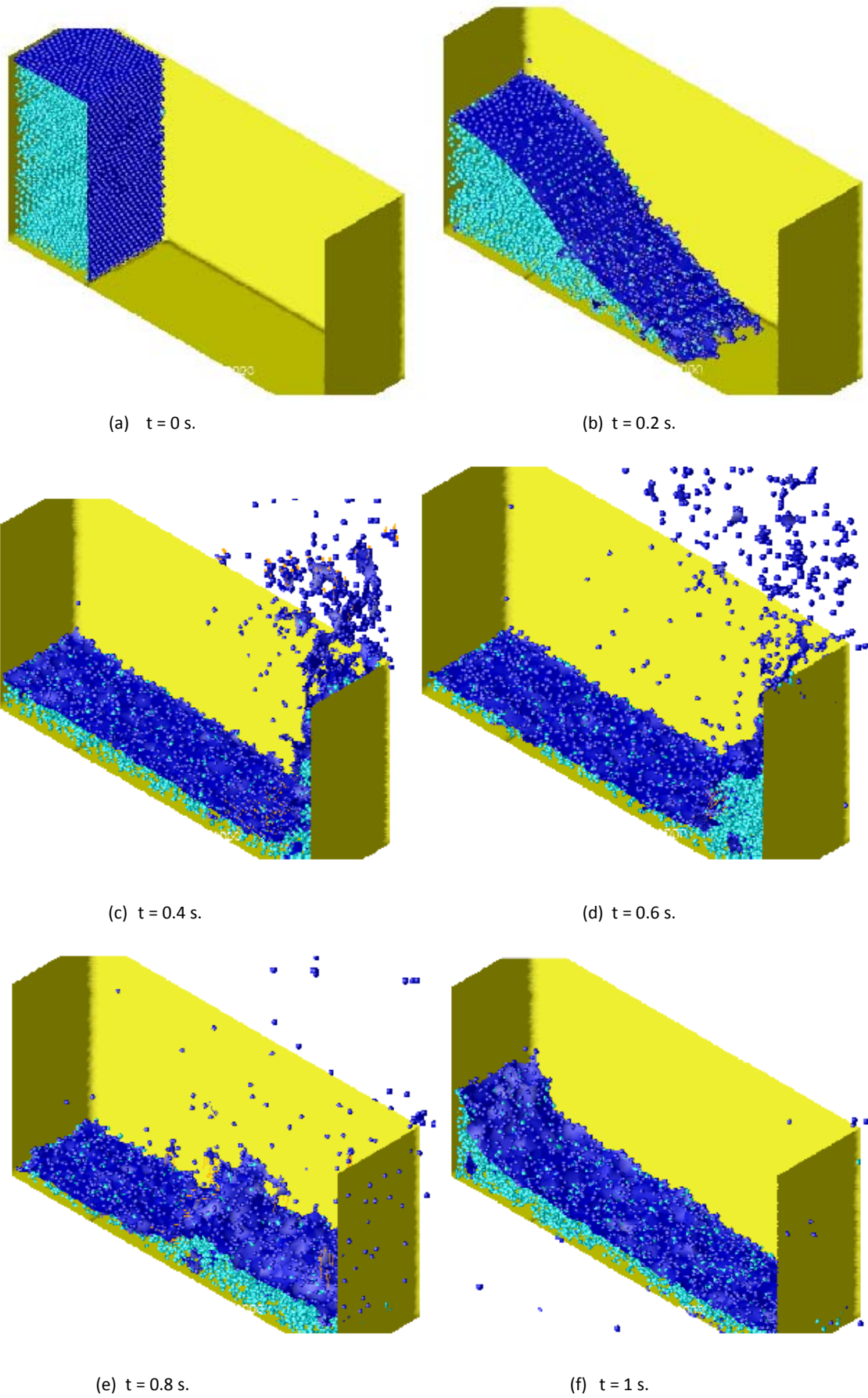
### 2.6.1 COLAPSO DE UNA COLUMNA DE AGUA

---

Este primer ejemplo tiene la finalidad de demostrar el gran potencial del PFEM en el estudio del colapso de una columna de agua. Este problema fue resuelto por Koshizu y Oka [4], tanto experimental como numéricamente. Se ha convertido en un ejemplo clásico para probar la validación de la formulación de Lagrange en flujos de fluidos. La columna de agua está inicialmente en reposo situada a la izquierda apoyada en un tablero desmontable. Se puede observar una representación esquemática en la figura 2.3. Las condiciones frontera imponen velocidad nula en la pared y presión cero (atmosférica) en la superficie libre. Se puede observar como el método permite seguir el movimiento de las partículas de agua incluyendo la separación de gotas de agua. El colapso se inicia en el instante  $t = 0$ , cuando la pared que sustenta el agua se extrae. La viscosidad y la tensión superficial son despreciadas en el análisis.

La figura 2.3 muestra la posición de los puntos en diferentes pasos de tiempo. Los puntos oscuros representan la superficie libre que se detecta con la técnica Alpha-Shape mediante un valor de  $\alpha = 1.1$ . Los puntos internos se muestran en color azul cielo y la pared fija en amarillo.

El agua recorre la parte inferior de la pared, cerca de 0.3 seg, hasta colisionar con la pared vertical derecha. La rotura de olas aparece a los 0.6 seg. Pasado un segundo aproximadamente, la ola principal llega de nuevo a la pared izquierda. De acuerdo con los resultados experimentales de ref. [4], tanto la forma de la superficie libre como el tiempo de desarrollo son excelentes.



**Figura 2.3.** Colapso de una presa en un dominio 3D. Diferentes pasos de tiempo



### 2.6.2 PROBLEMAS DE VAIVÉN

A continuación se considera un problema de libre oscilación de un líquido incompresible almacenado en un recipiente. Soluciones numéricas para este tipo de problema se pueden encontrar en diversas referencias [24]. Este problema es interesante porque hay una solución analítica para pequeñas amplitudes. La figura 2.4 muestra una visión esquemática del problema y la distribución de puntos en la posición inicial. Los puntos oscuros representan los puntos fijos donde la velocidad está fijada a cero.

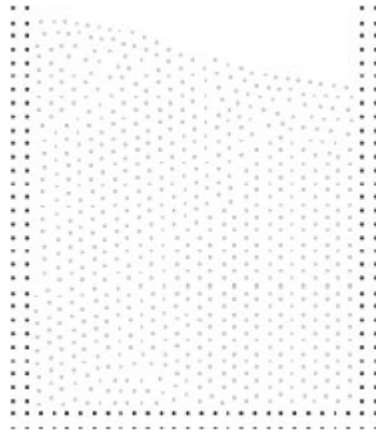


Figura 2.4. Vaivén. Distribución inicial de

La figura 2.5 muestra la variación en el tiempo de la amplitud comparada con los resultados analíticos. Una pequeña viscosidad numérica se observa en las ondas y amplitudes a pesar de la mala distribución relativa de puntos.

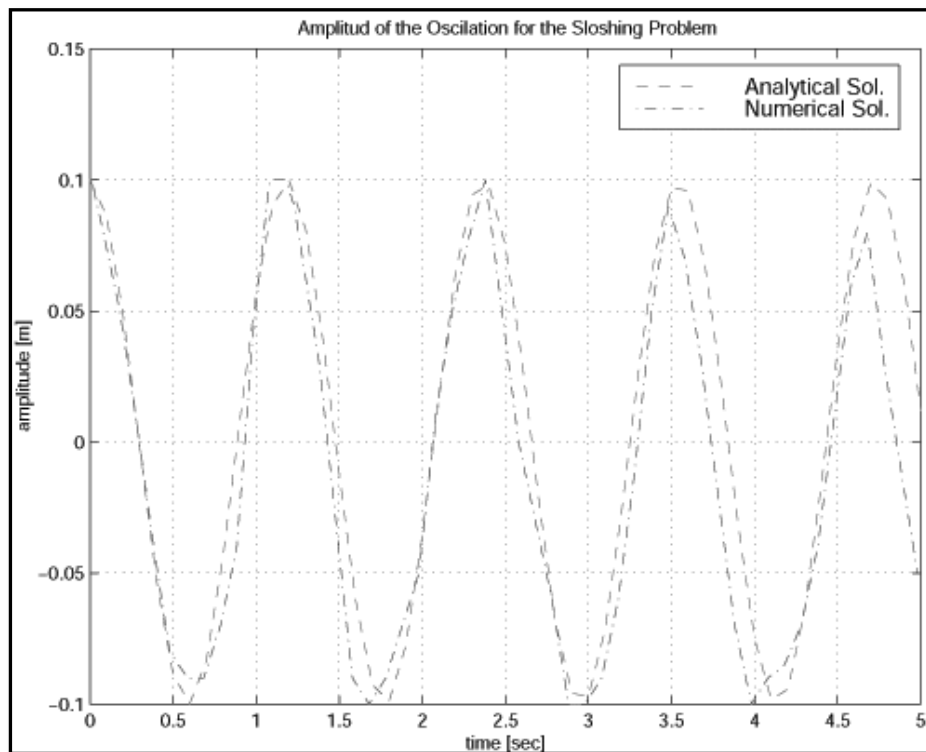
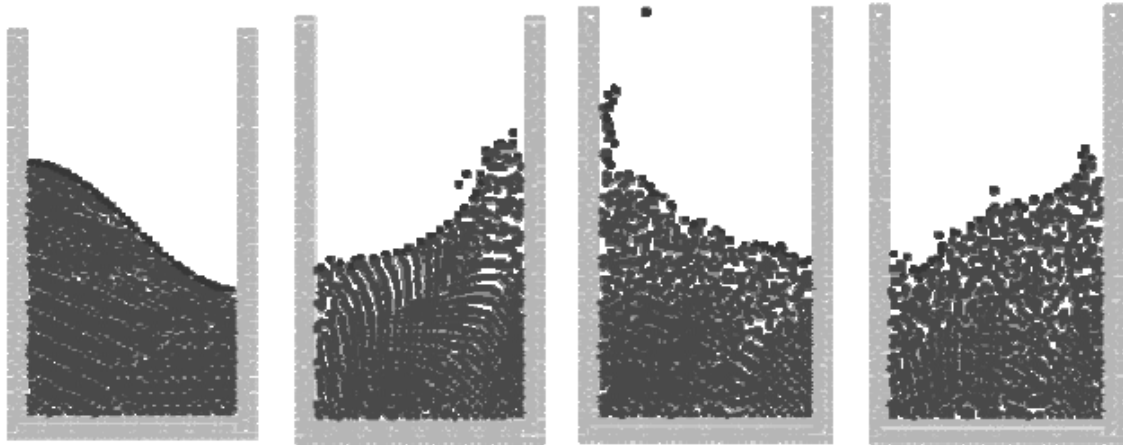


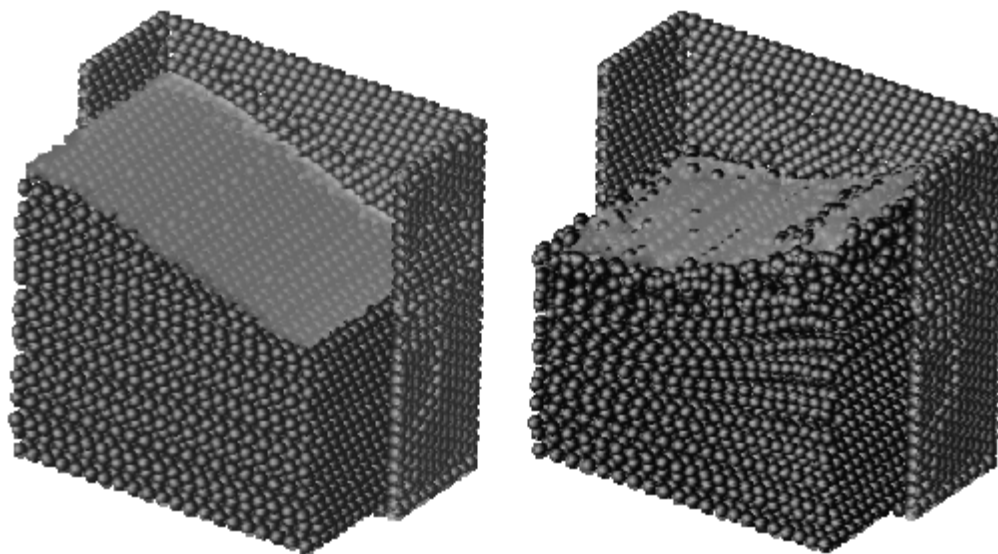
Figura 2.5. Vaivén. Comparación entre la solución numérica y analítica

La solución analítica sólo es aceptable para pequeñas amplitudes de onda. Para mayores amplitudes, las ondas se superponen y, finalmente, la ola rompe y también algunas partículas pueden separarse del dominio del fluido debido a su gran velocidad. En la figura 2.6 se muestra los resultados numéricos obtenidos con el PFEM para grandes amplitudes. La rotura de olas, así como los efectos de separación, puede verse en la superficie libre. Este caso particular está muy bien presentado mediante el PFEM.



**Figura 2.6.** Vaivén. Diferentes pasos de tiempo para grandes amplitudes

Con el fin de probar el potencial del PFEM en un dominio 3D, el mismo problema de vaivén se resuelve en 3D. La figura 2.7 muestra las distintas posiciones de los puntos en dos pasos de tiempo. Cada posición de los puntos está representada por una esfera y sólo una mitad de los puntos del contorno están representados en la figura. Esta forma representación simplemente se usa para visualizar mejor los resultados numéricos.



**Figura 2.7.** Vaivén: Diferentes pasos de tiempo para dominios 3D

### 2.6.3 OLA ROMPIENDO EN LA PLAYA

En el próximo caso se presenta una simulación de la propagación de una ola de agua y su ruptura debido al *shoaling* a lo largo de un plano de pendiente. Este ejemplo fue numéricamente estudiado en [24] con una formulación de Lagrange utilizando directamente el Método de los Elemento Finitos con remallado. También hay una solución analítica para una aproximación simplificada que se utiliza para comparar los resultados [25]. La figura 2.8 muestra la distribución de puntos iniciales y en la figura 2.9 se compara estos datos con el análisis de superficie libre en diferentes pasos del tiempo. La geometría del problema así como una discusión acerca de la solución analítica pueden encontrarse en ref. [24].

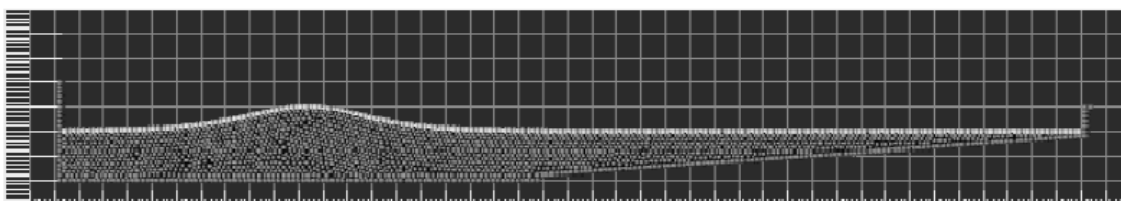
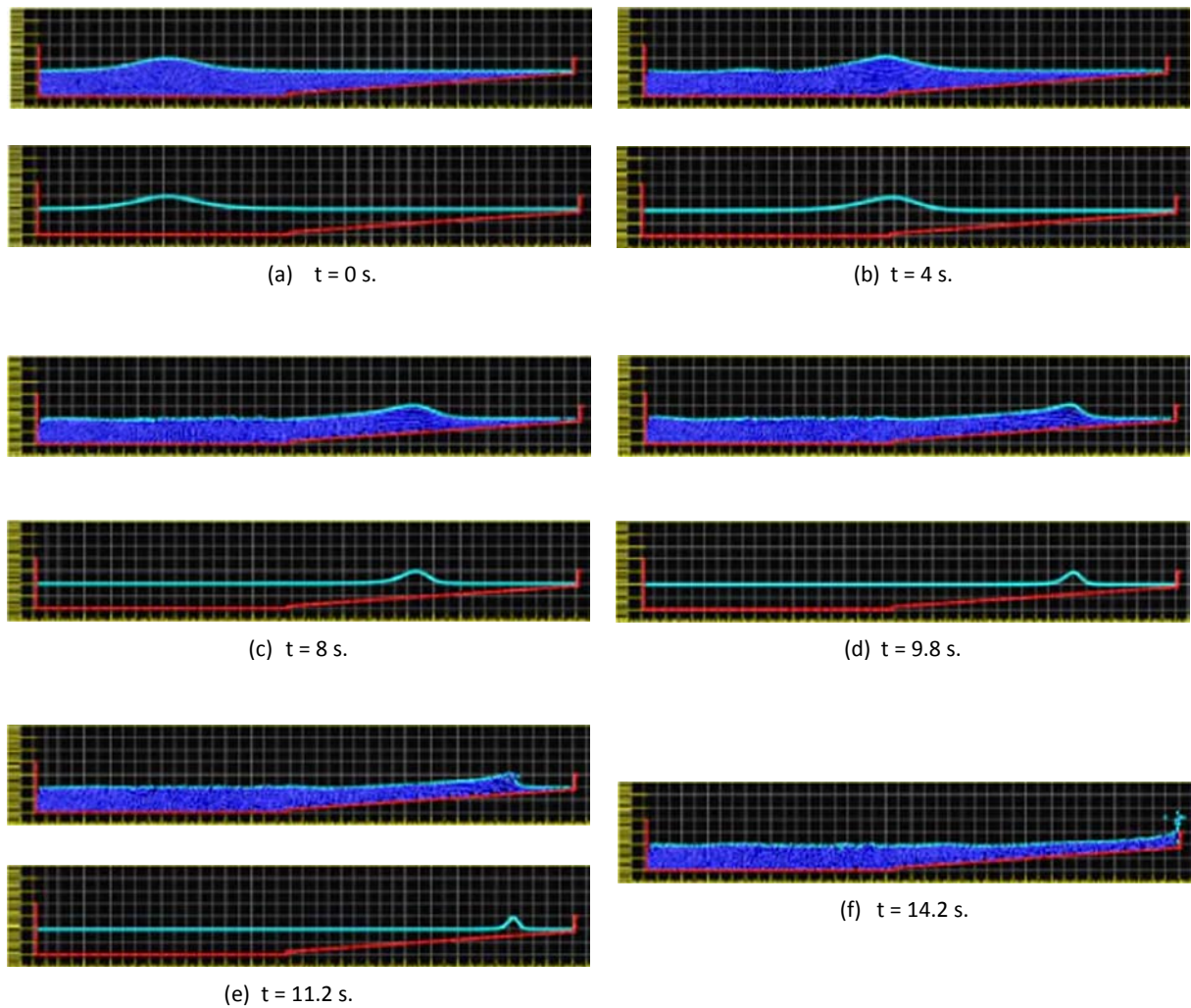


Figura 2.8. Ola rompiendo en la playa. Geometría inicial y posiciones de los puntos.

Inicialmente (figuras 2.9 (a) y (b)), la ola viaja a lo largo de una profundidad constante hacia la pendiente sin ningún cambio de forma aparente. Los efectos no lineales aparecen cuando la ola golpea la pendiente (figura 2.9 (c)). En este momento, el único aspecto en común con la solución analítica es la posición de la ola. La forma de la ola obtenida en la solución numérica es totalmente diferente. La razón es que, antes del proceso de rotura de la ola, la solución analítica proporciona formas de olas simétricas, lo cual carece de sentido físico. Posteriormente, el chorro de agua formado en la cresta tiene a provocar la rotura de la ola (figuras 2.9 (d) y (e)) y entra en contacto con la superficie de agua que tenemos por delante. En la ref. [24], la evaluación se detiene antes de este punto de contacto. Sin embargo, con la metodología propuesta, el análisis puede continuarse hasta el final. En la figura 2.9 (f), la ola finalmente golpea una pared lateral (introducida en el modelo para detener los efectos laterales) produciendo separaciones de las gotas de agua y, a continuación, vuelve a la izquierda como una nueva ola.

Resulta notable la capacidad del PFEM para simular fielmente la diversas etapas de la ola rompiendo.

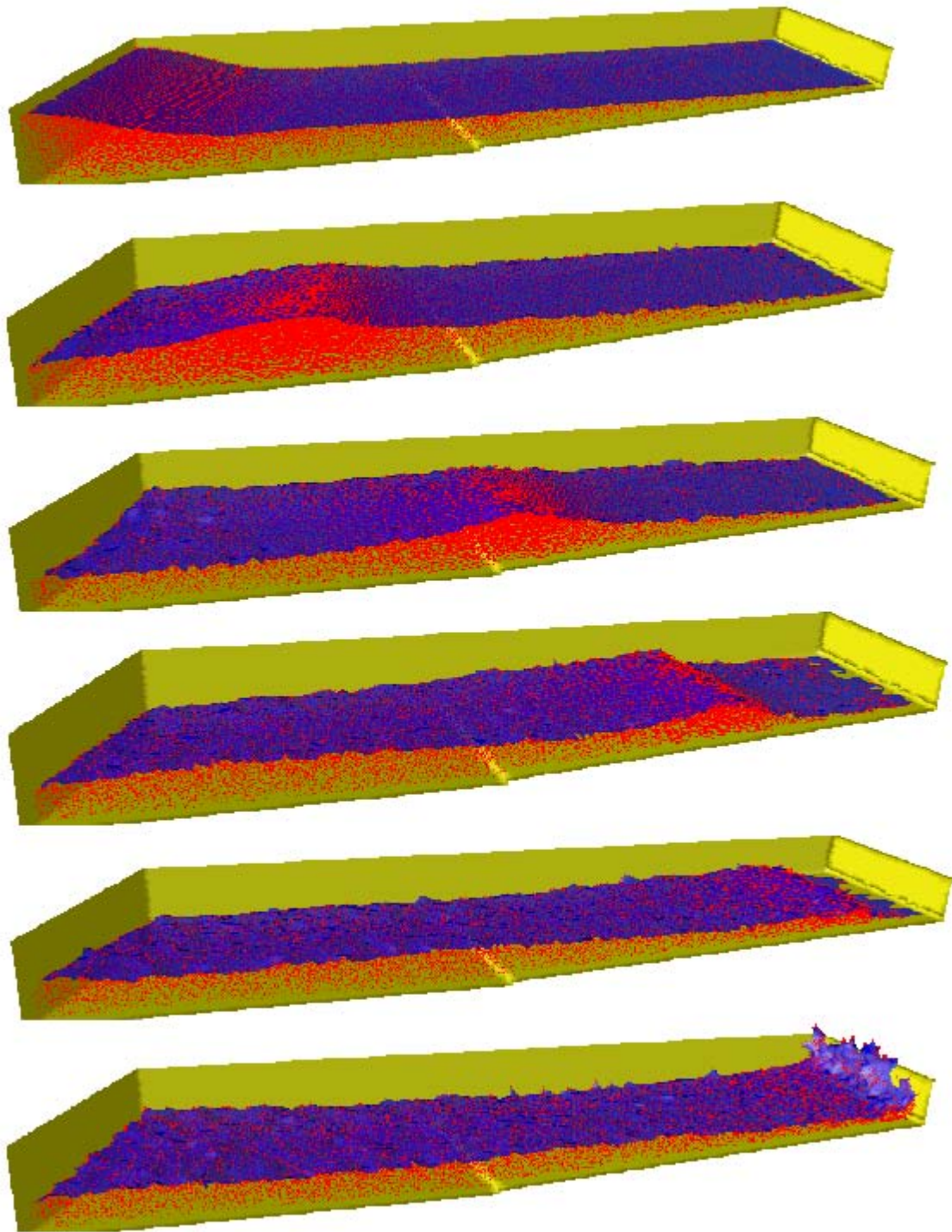
Sin embargo, el dominio 2D es más sencillo y puede ser resuelto aceptablemente con cualquier generador de malla. Los verdaderos problemas aparecen en el dominio 3D, donde la generación de mallas se complica. Con el fin de mostrar la potencia de la herramienta presentada, se resuelve el mismo problema en un dominio 3D. Para transformar la ola descrita antes de romper en un verdadero problema en 3D, la posición inicial de la ola es presentada con un ángulo oblicuo con la línea de playa. De esta manera, aparece un efecto 3D. Cuando la ola golpea la pendiente, se acelera la cresta de la ola de manera diferente de acuerdo con la profundidad, induciendo a la ola a corregir su posición oblicua finalmente para romper paralela a la playa. Los resultados se muestran en la figura 2.10 para diferentes pasos de tiempo.



**Figura 2.9.** Ola rompiendo en la playa. Comparación con los resultados numéricos en diferentes pasos de tiempo.

En la siguiente figura se puede apreciar los resultados obtenidos en el dominio 3D en diferentes pasos de tiempo. Gracias a la eficiencia de nuestro modelo, los resultados obtenidos son coincidentes en ambos dominios.





**Figura 2.10.** Rotura de ola en una playa: olas oblicuas en un dominio 3D.

#### 2.6.4 SÓLIDOS FLOTANTES SOBRE UNA SUPERFICIE LIBRE

---

El siguiente ejemplo se representa esquemáticamente en la figura 2.11 y es un problema muy interesante de interacción fluido-estructura con una débil interacción entre el fluido y una gran rigidez de deformación de la estructura. En este caso, también hay un problema de superficie libre, lo que representa un caso esquemático de mantenimiento en hidrodinámica para barcos.

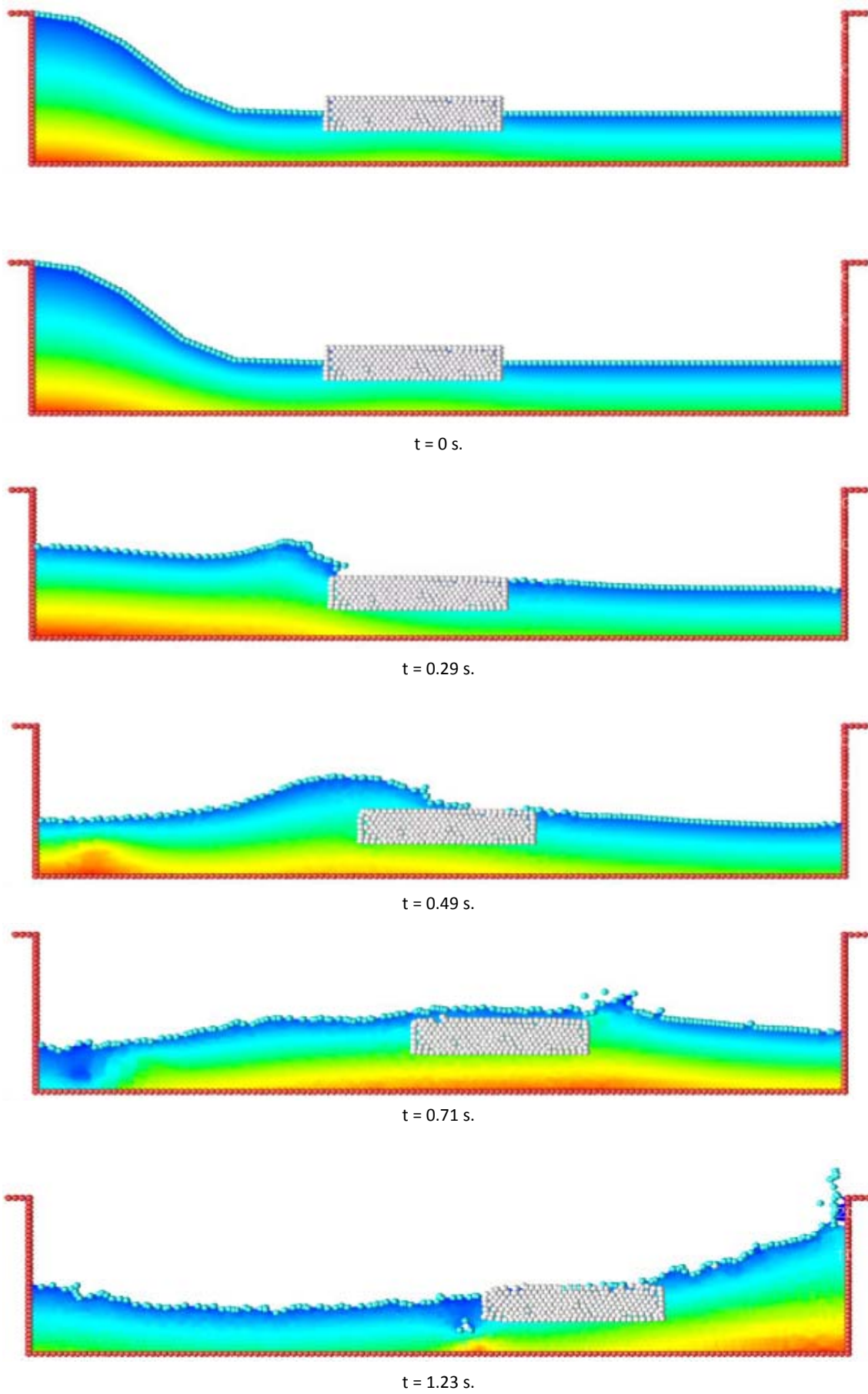
El ejemplo muestra un recipiente inicialmente en reposo con un trozo de madera flotando. Por otra parte, en la parte izquierda del dominio del fluido, se genera una ola con una cierta velocidad de propagación. La ola intercepta la pieza de madera produciéndose una rotura en la ola y un movimiento brusco de la madera flotante. En este ejemplo, el sólido está representado por un fluido muy viscoso con un parámetro de viscosidad diez veces superior al del agua. En la misma figura se muestran los contornos de presión y la superficie libre para diferentes pasos de tiempo.

#### 2.6.5 CUBO CAYENDO EN UN RECIPIENTE DE AGUA

---

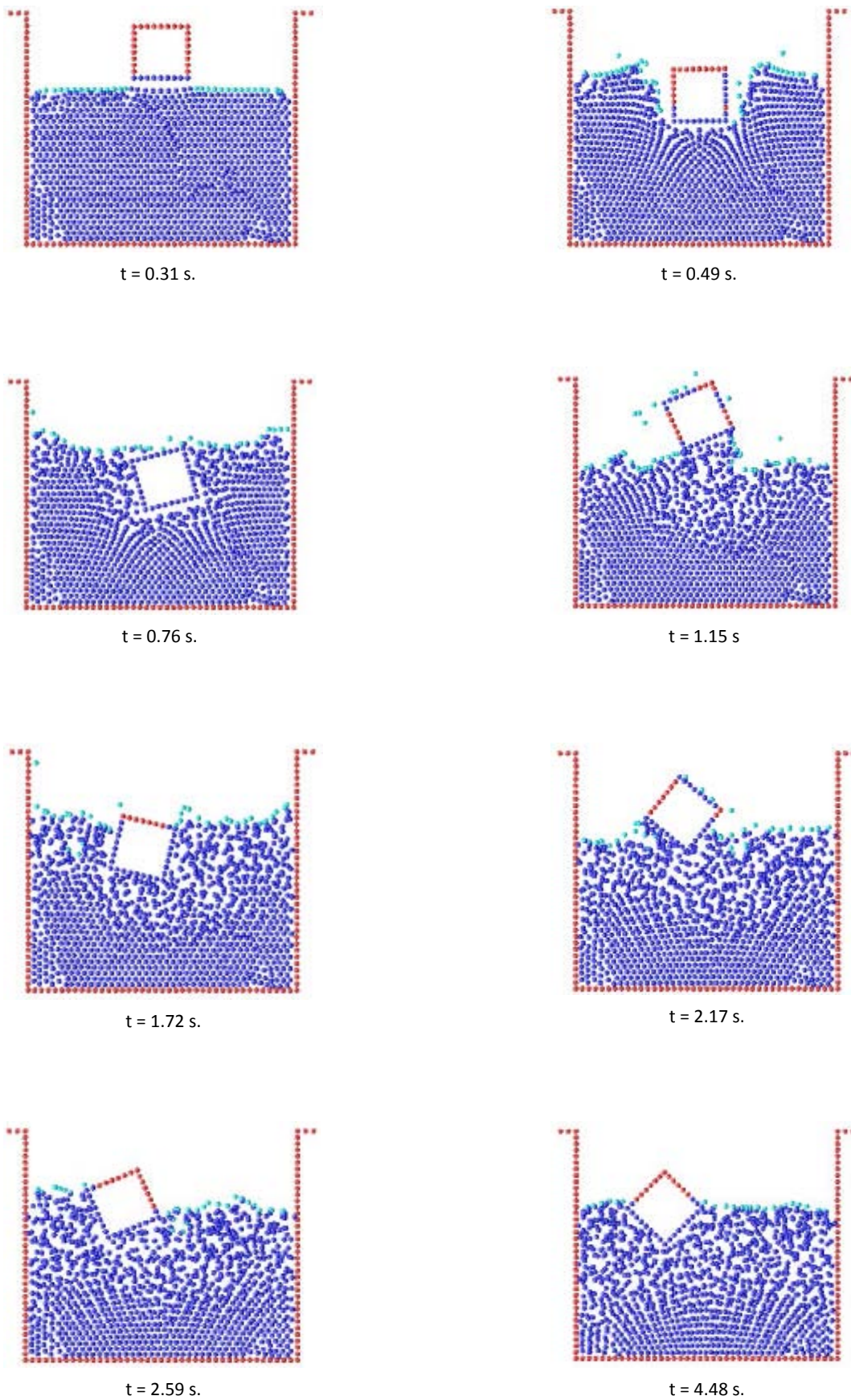
Este último ejemplo también está relacionado con los problemas de interacción fluido-estructura. El sólido es en principio totalmente libre y está cayendo en un recipiente con un fluido en su interior. En este ejemplo, el sólido fue modelado como una condición de contorno para fluido. Una vez que la presión y las fuerzas viscosas han sido evaluadas sobre el fluido, el sólido se acelera según la ley de Newton. El sólido tiene una masa y una fuerza de gravedad que se concentran en su respectivo centro de gravedad. El sólido se considera ligero en comparación con el peso del líquido.

En un principio, el sólido sigue un movimiento de caída libre debido a la actuación de las fuerzas de gravedad. Una vez en contacto con la superficie del agua, la técnica *Alpha Shape* reconoce el contorno de frontera de manera diferente. Las fuerzas de presión y las fuerzas viscosas son evaluadas en todos los dominios y, en particular, en el contorno sólido. Estas fuerzas de flujo introducen una aceleración negativa en la velocidad vertical hasta que, una vez que el sólido se encuentra totalmente sumergido en el agua, la disminución de la velocidad se convierte en cero. A continuación, la fuerza del principio de Arquímedes hace reflotar el sólido hasta la superficie libre. Resulta interesante observar que se produce una rotación de los sólidos. Este hecho se debe a que el centro de las fuerzas de flotación es superior en la posición de rotación que en la inicial.



**Figura 2.11.** Sólidos flotantes sobre una superficie libre en diferentes pasos de tiempo





**Figura 2.12.** Cubos sólidos cayendo en un recipiente con agua. Posición de la superficie libre en diferentes pasos de tiempo.



## 2.7. CONCLUSIONES

---

- El Método de las partículas, en combinación con el Método de los Elementos Finitos en los que las mallas se generan linealmente con el número de partículas, son una excelente herramienta para resolver problemas de la mecánica de fluidos, especialmente las interacciones fluido-estructura con los movimientos de superficie libre.
- La rotura de olas, problemas de colapso, problemas de separación de flujos y contactos se pueden resolver fácilmente sin ninguna limitación adicional.
- El Método de elementos finitos sin malla (meshless), parece que es el mejor MEF adaptado a este tipo de combinación. De hecho, el MFEM muestra las ventajas del método meshless en relación con al fácil introducción de los nodos de conexión en un tiempo limitado de orden  $n$ . El método también preserva las ventajas clásicas del MEF, tales como: (a) la simplicidad en las funciones de forma, (b) la continuidad entre los elementos, (c) una fácil introducción de las condiciones de contorno, y (d) simetría de las matrices.
- Ambos métodos, el de las partículas y el MFEM son los ingredientes clave para resolver problemas fluido-estructura incluso con superficie libre, rotura de olas, separaciones del flujo y situaciones de colapso.

### *3. ESTUDIO TRIDIMENSIONAL ESCALÓN AGUA*

---

#### *3.1. INTRODUCCION*

---

En este capítulo vamos a estudiar la validación y la aplicabilidad del PFEM. En concreto, el estudio del comportamiento de la superficie libre de agua que se encuentra sometida a las perturbaciones del movimiento de un gran escalón de agua.

Dado que el objeto de esta Tesina es estudiar el rebase del oleaje sobre diques de puertos mediante el Método de las Partículas, se ha decidido, en primer lugar, realizar un caso sencillo en el que se observe que el código del programa funciona correctamente.

A día de hoy, la simulación de fluidos mediante el PFEM en un caso bidimensional siempre ha resultado válida hasta el punto en que la diferencia de soluciones entre un caso computado y el mismo caso experimental es prácticamente despreciable.

El interrogante aparece cuando queremos validar el método para un caso tridimensional, donde la fiabilidad de la solución aún es cuestionada. Por este motivo, realizamos dicho estudio que consistirá en verificar que la solución proporcionada mediante el Método de las Partículas es precisa y no da lugar a errores.

De esta manera se ha ido reproduciendo el caso del escalón de agua con la técnica PFEM desarrollada en CIMNE tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional. Posteriormente, se observarán que los resultados han sido satisfactorios demostrándose la aplicabilidad y fiabilidad del PFEM para el estudio tridimensional de geometrías de pequeñas dimensiones.

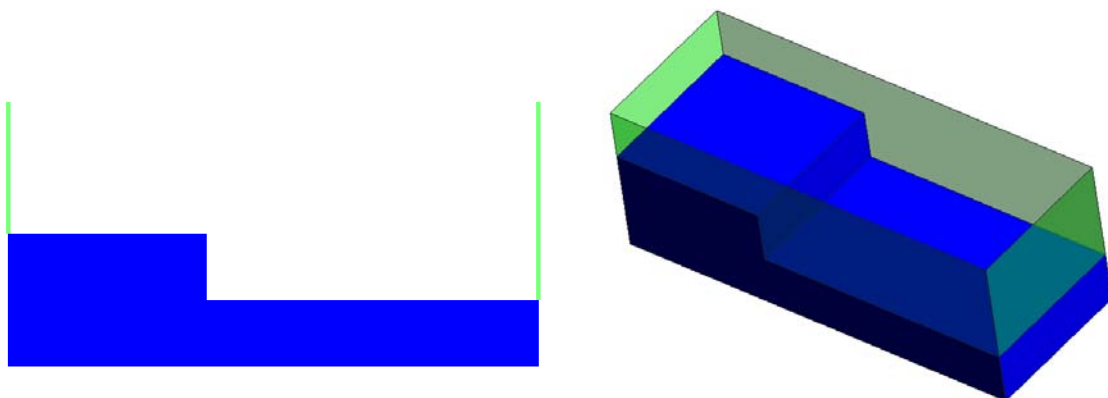
### 3.2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

En este apartado se muestra la simulación del escalón de agua basada en el método de los elementos finitos y de partículas (PFEM) para contribuir a su validación. Para ello, se ha considerado un escalón de agua que origine la oscilación libre de toda la masa del fluido. Nosotros nos fijaremos en el movimiento que se produce en la superficie libre del fluido mediante una colocación determinada de sensores. Estos dispositivos nos proporcionan la información necesaria para determinar la evolución en el tiempo de la superficie de la masa de agua.

En este dominio se ha dispuesto de dos contornos verticales que ejercerán la función de paredes de manera que no permitan la salida del agua con el cumplimiento de las condiciones de contorno impuestas en dichos elementos.

Con este estudio hemos querido representar un caso sencillo de lo que, posteriormente, estudiaremos más a fondo, como es el rebase del oleaje sobre diques de puertos, en el cual se intentará demostrar que el estudio tridimensional mediante el PFEM se puede llevar a cabo.

El problema del escalón se puede interpretar experimentalmente como el estudio de una columna de agua que se encuentra almacenada en un canal limitado por dos paredes verticales que están separadas entre sí una distancia de 40 metros. El esquema inicial con la columna de agua en reposo se obtendría mediante una compuerta que soporte la presión de dicha columna y que permita una apertura rápida y controlada.



**Figura 3.1.** Diseño geométrico 2D y 3D del escalón de agua.

Las paredes verticales y laterales se elevan hasta una altura de 20 metros con el fin de evitar pérdidas importantes de masa de agua que se pueden generar debido al primer impacto de la columna contra la pared. El escalón se caracteriza por una altura de 10 metros agua con una anchura de 15 metros. Al otro lado de la compuerta, el resto de la masa de agua se encuentra en reposo a una altura de 5 metros a lo largo de los 25 metros siguientes. En el caso tridimensional, todas las variables son las mismas añadiendo las características de una tercera dimensión, que es la profundidad. En este problema se dispone de una profundidad de 15 metros.

Para poder realizar una comparación entre el caso 2D y 3D, los sensores de superficie libre se han colocado a una distancia de 15 metros del escalón. El PFEM registrará en cada iteración del cálculo del problema el valor de cada una de las variables del fluido y la posición de nuestro sensor que se ha colocado inicialmente.

De este modo, obtenemos los datos necesarios para realizar la comparación entre ambos casos.

CASO BIDIMENSIONAL		
	X (m)	Y (m)
Sensor 1	30	-
CASO TRIDIMENSIONAL		
Sensor 1	30	3.75
Sensor 2	30	7.5
Sensor 3	30	11.25

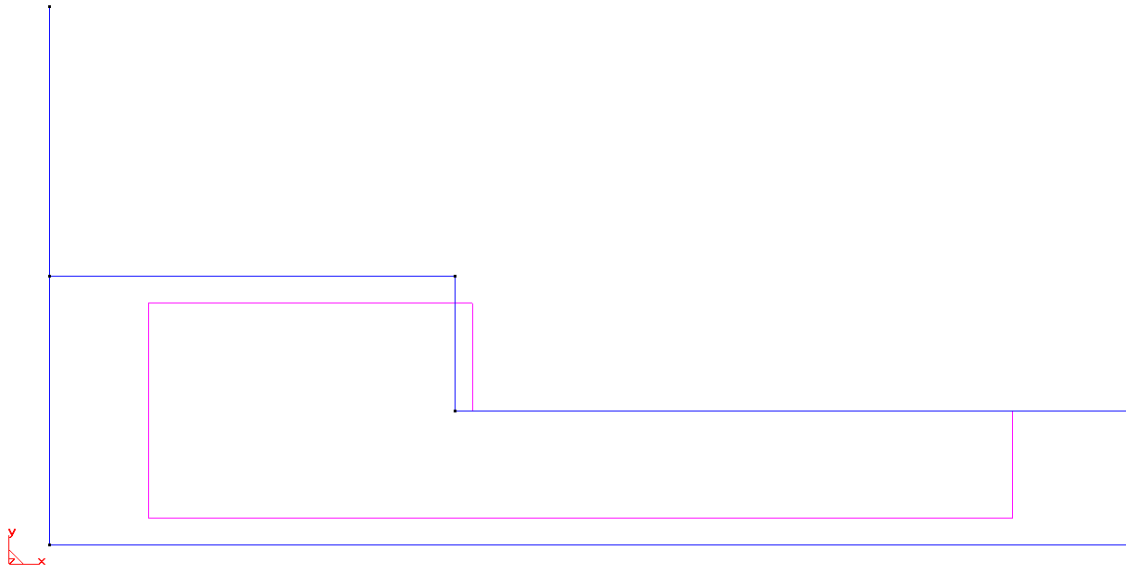
**Tabla 3.1.** Posición de los sensores de superficie libre

A continuación se observa los 5 casos que se han realizado, donde el tamaño del elemento ha ido disminuyendo con el fin de obtener una solución más exacta y precisa. Las características del elemento han sido idénticas tanto en 2D como en 3D. Como resulta lógico, en el caso tridimensional, el tiempo de cálculo es claramente superior al tiempo de cálculo del caso 2D, por lo que, la convergencia de la solución ha resultado mucho más costosa.

### 3.3. SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL

---

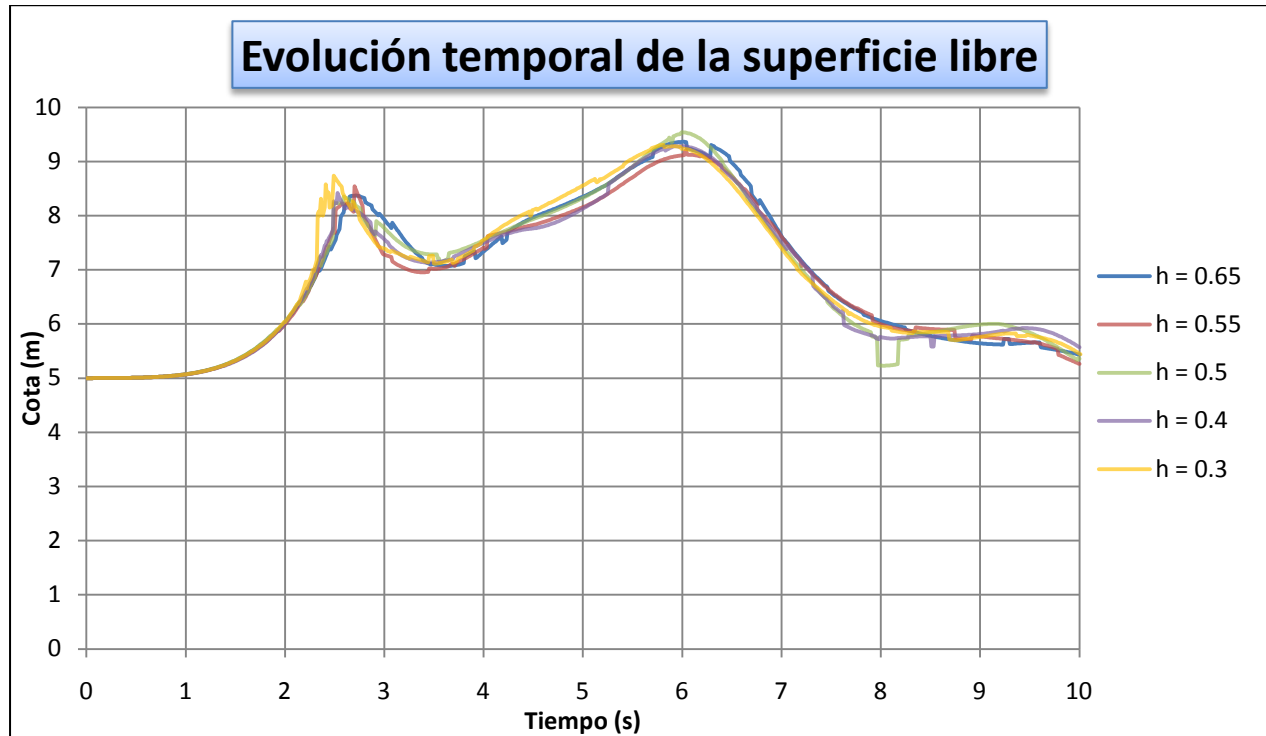
A continuación se muestran los resultados obtenidos para el caso 2D con las simulaciones ejecutadas con PFEM. Se observan los casos calculados en referencia a los cinco tipos de elementos que se ha utilizado para discretizar el dominio de estudio.



**Figura 3.2.** Geometría de la simulación 2D del escalón de agua.

Para el primero de los casos, el tamaño del elemento utilizado es de 0.65 m y a medida que hemos avanzado, hemos intentado obtener una mayor calidad de la solución. Por este motivo, en los otros casos restantes el tamaño del elemento es de 0.55, 0.5, 0.4 y 0.3, respectivamente.

Se muestra, a continuación, la evolución temporal de los sensores de superficie libre para cada uno de los cinco casos en un intervalo de 10 segundos de simulación.



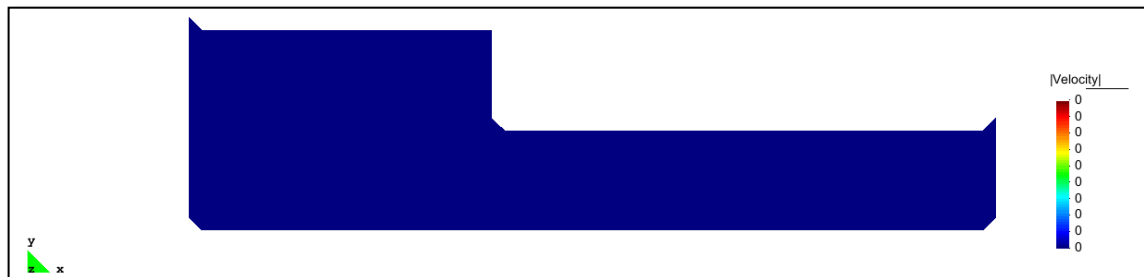
**Figura 3.3.** Comparativa de la evolución temporal de la superficie libre.

La realización de la comparativa nos permite corroborar las premisas con las que se había llevado a cabo la ejecución del apartado. Con la reducción del tamaño del elemento, la simulación de la superficie libre se acerca cada vez más a la realidad. En el último caso llevado a cabo ( $h=0.3$ ), se destaca la continuidad de la evolución de la cota y la disminución de existencia de desplazamientos bruscos como ocurre con el tamaño de malla  $h=0.5$  en  $t = 8$  segundos.

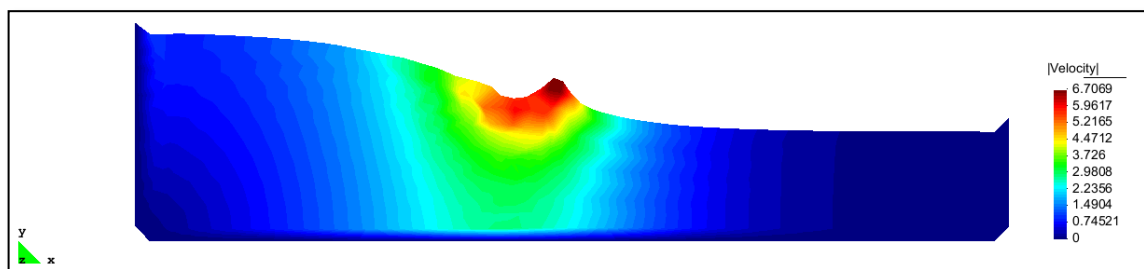
### 3.3.1. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en la simulación 2D que nos ayudará a realizar una mejor comparativa con el caso tridimensional.

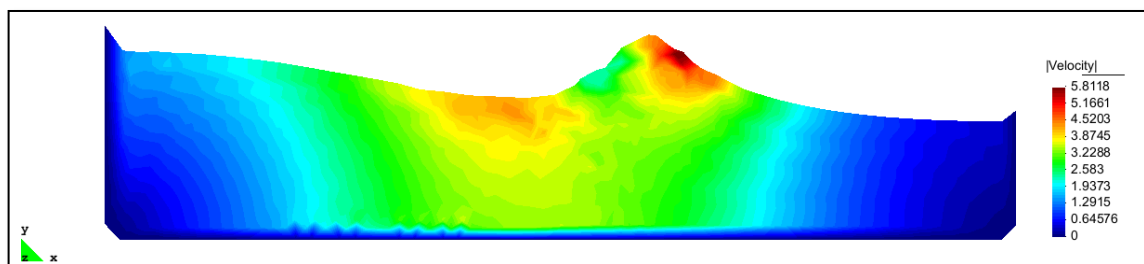
A continuación se observan los perfiles de la superficie libre con su respectivo módulo de velocidad para 10 pasos de tiempo correspondientes a cada uno de los segundos de la simulación y un tamaño de malla de 0,65.



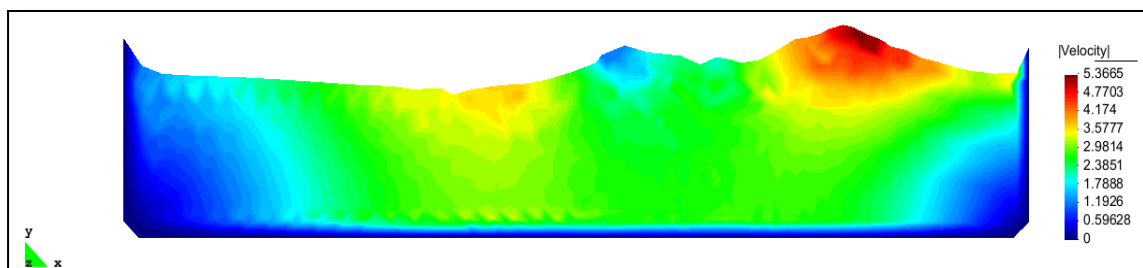
**Figura 3.4.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 0s$



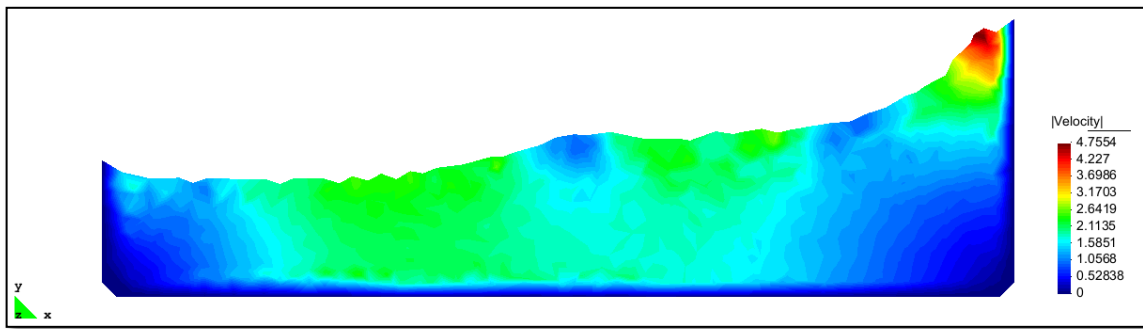
**Figura 3.5.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 1s$



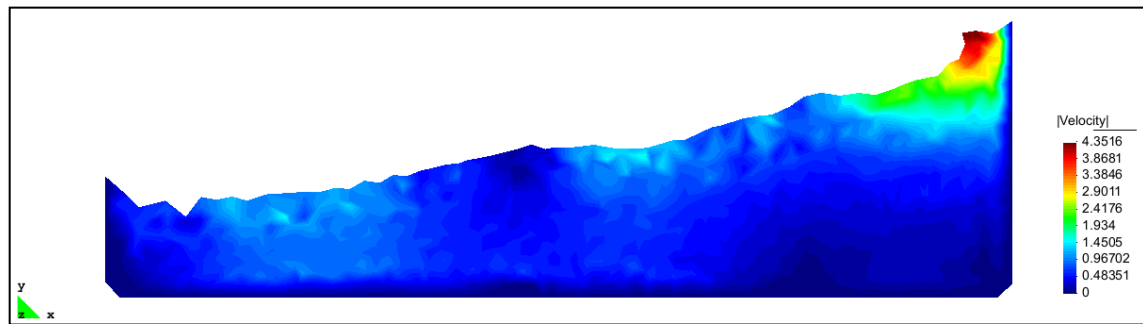
**Figura 3.6.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 2s$



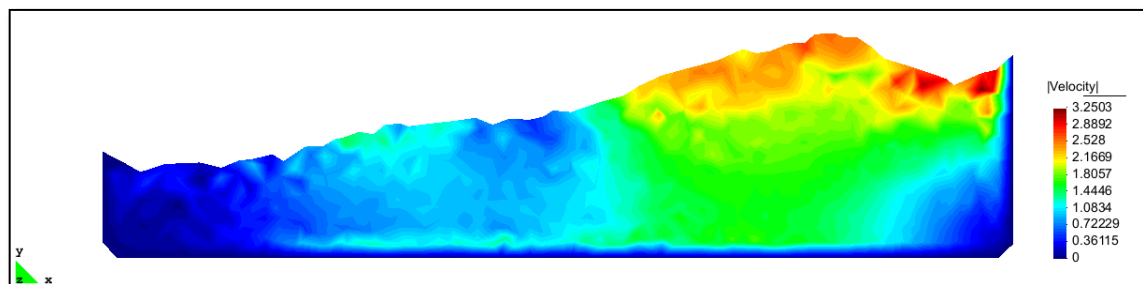
**Figura 3.7.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 3s$



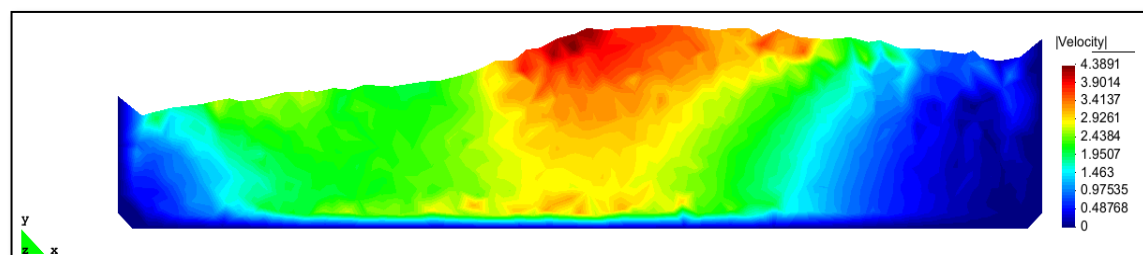
**Figura 3.8.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 4s$



**Figura 3.9.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 5s$

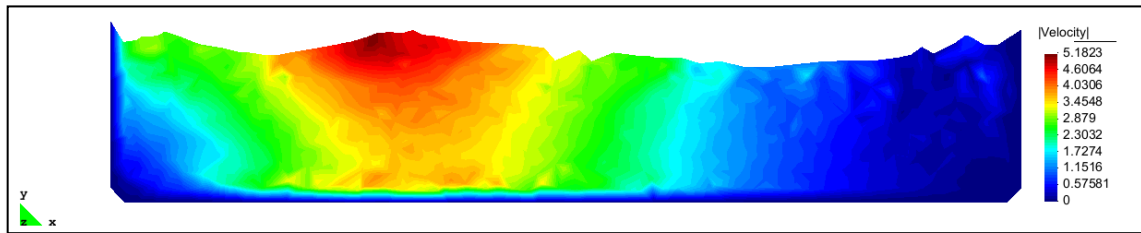


**Figura 3.10.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 6s$

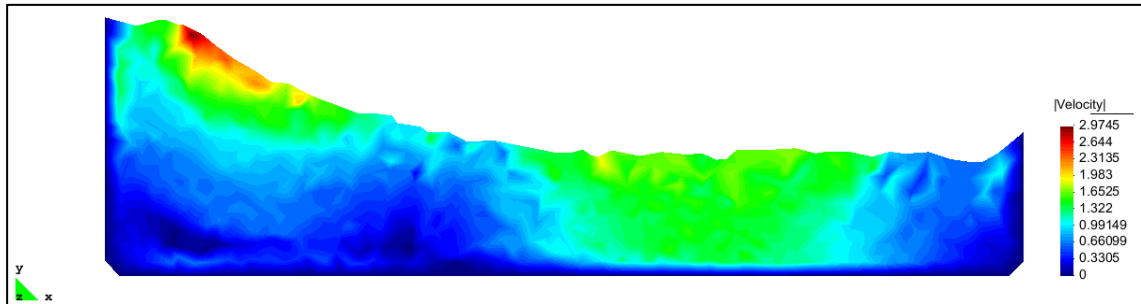


**Figura 3.11.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 7s$

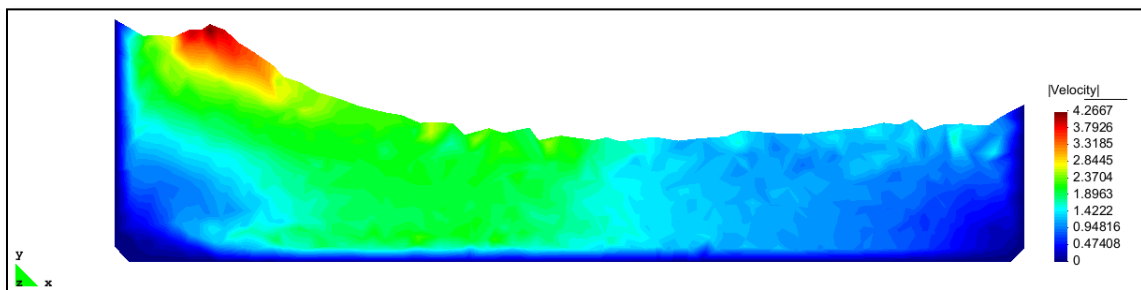




**Figura 3.12.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 8s$



**Figura 3.13.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 9s$



**Figura 3.14.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 10s$

A medida que hemos ido disminuyendo el tamaño de la malla, la simulación del comportamiento ha mejorado, mejorando la continuidad de la superficie libre y definiendo un dominio mucho más refinado. Este hecho se comprueba, sobretodo, en los primeros pasos de tiempo donde el escalón de agua empieza su movimiento.

En zonas donde hay una mayor concentración de masa de agua, se observa como el mallado del dominio fluido cambia rápidamente para cada paso de tiempo debido al movimiento de las partículas que se mueven solidariamente con las leyes de un fluido viscoso e incompresible.

Otro aspecto que llama la atención es la presencia de pequeñas irregularidades en la lámina libre. La razón se debe al uso de la Técnica Alpha Shape. El movimiento de las partículas hace que se distancien las unas de las otras hasta tal punto en que se deja de reconocer como nodo frontera al superar la distancia máxima establecida  $\alpha h$ . De esta manera, se remalla cogiendo a otro nodo que esté incluido en una esfera de radio  $\alpha h$  y, como consecuencia, a un menor calado. Este problema es muy común en

el uso de mallas gruesas. Para los casos  $h = 0.4$  y  $h = 0.3$ , la solución es mucho más refinada, disminuyendo los fenómenos que antes se han mencionado.

A continuación se muestran los resultados de las presiones para los mismos 10 pasos de tiempo. A modo de comparación, en este caso se han expuesto los resultados para un tamaño de malla de 0,3 con el fin de que se puedan comprobar las diferencias explicadas anteriormente acerca de la Técnica Alpha Shape y la mejora del refinamiento de la superficie libre de la masa de agua.

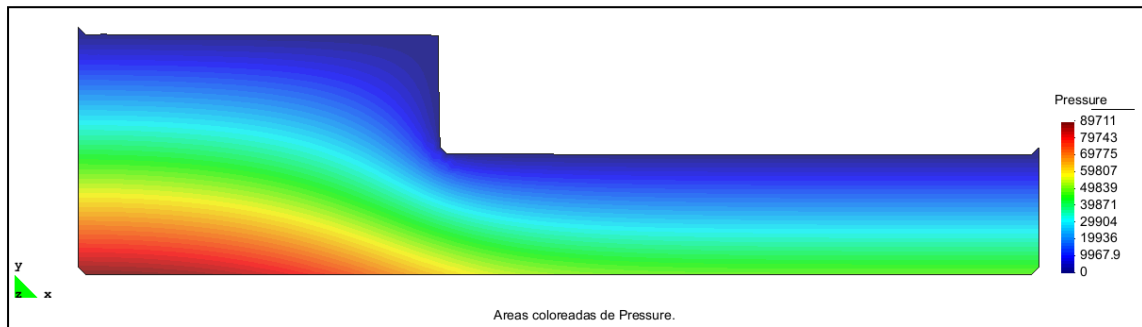


Figura 3.15. Distribución de presiones para  $t = 0.1s$

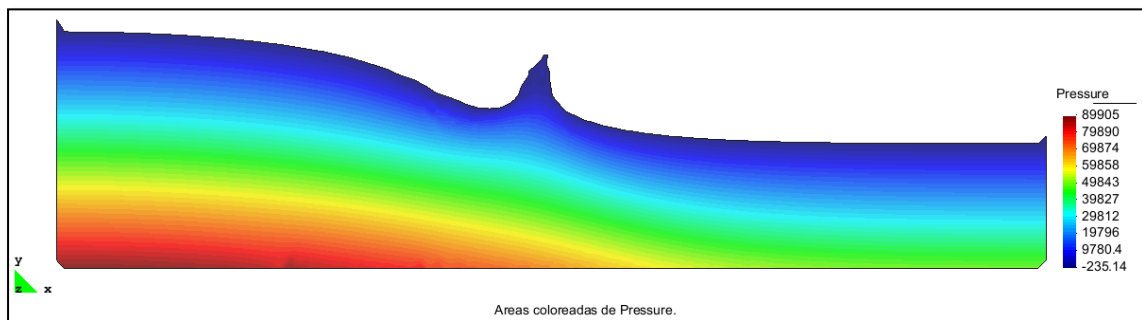


Figura 3.16. Distribución de presiones para  $t = 1s$

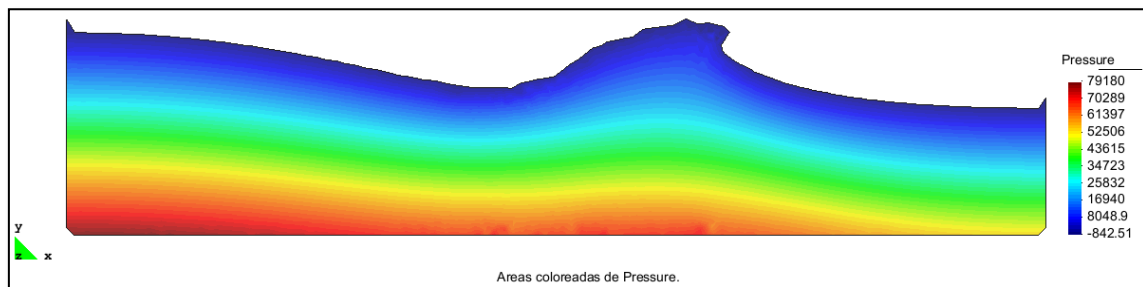


Figura 3.17. Distribución de presiones para  $t = 2s$

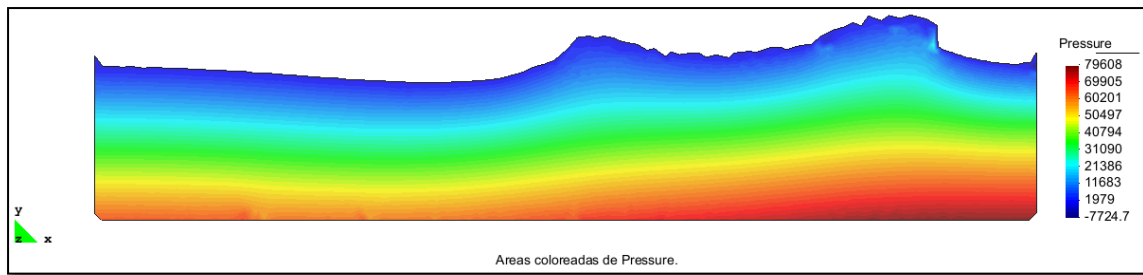


Figura 3.18. Distribución de presiones para  $t = 3s$

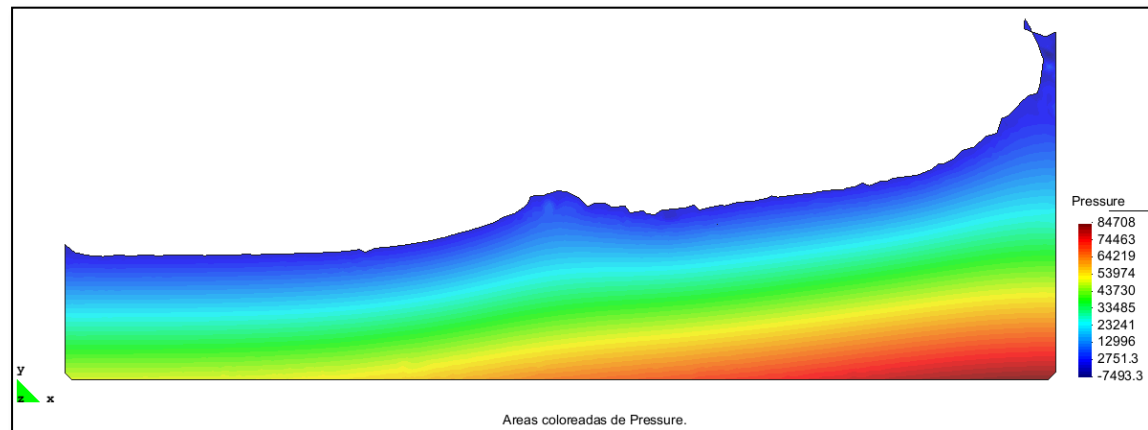


Figura 3.19. Distribución de presiones para  $t = 4s$

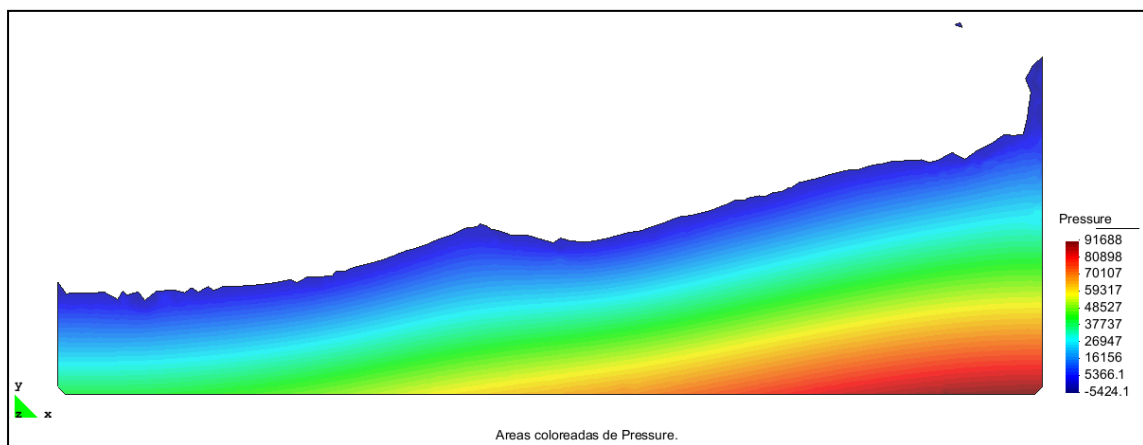


Figura 3.20. Distribución de presiones para  $t = 5s$

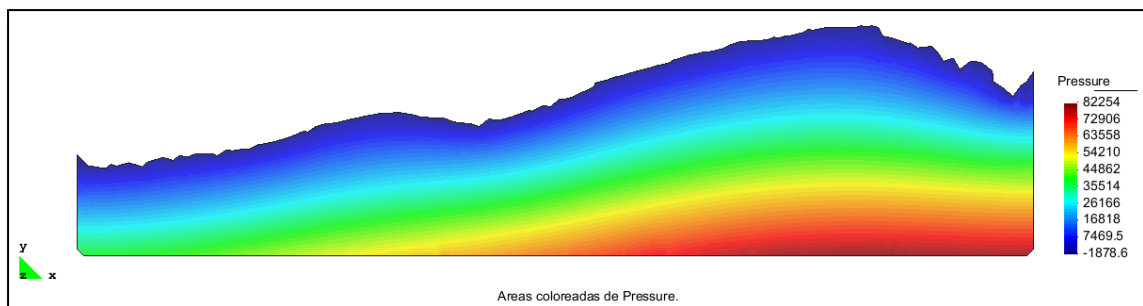
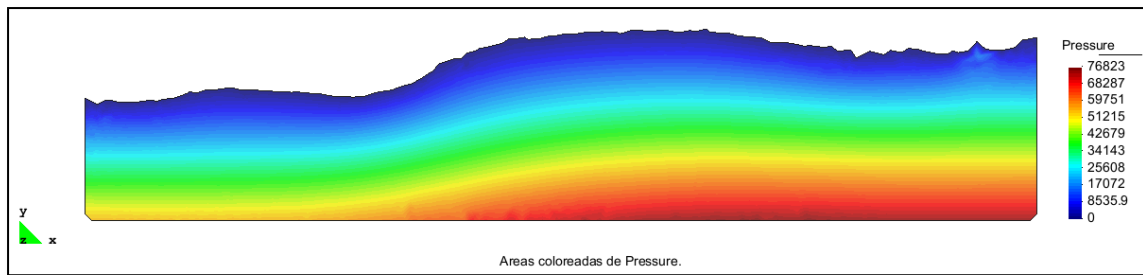
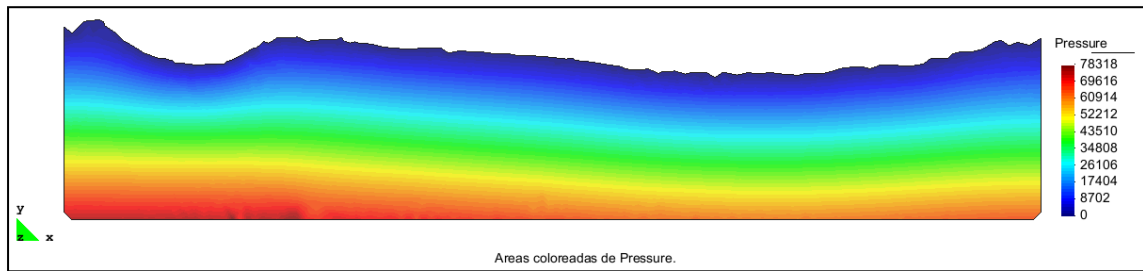


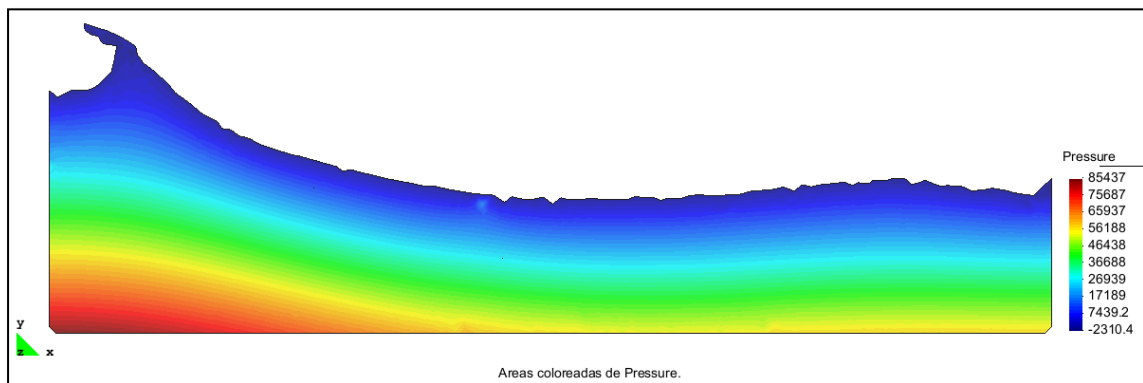
Figura 3.21. Distribución de presiones para  $t = 6s$



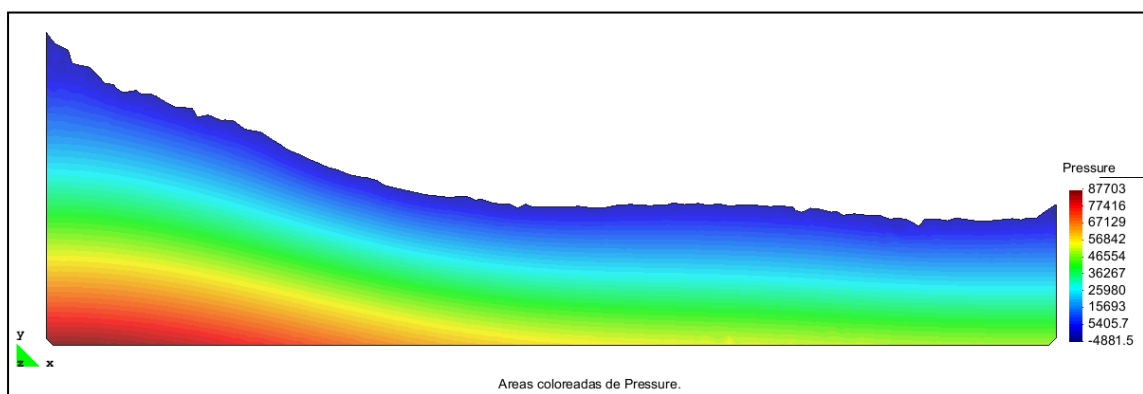
**Figura 3.22.** Distribución de presiones para  $t = 7s$



**Figura 3.23.** Distribución de presiones para  $t = 8s$



**Figura 3.24.** Distribución de presiones para  $t = 9s$



**Figura 3.25.** Distribución de presiones para  $t = 10s$

Los resultados muestran una distribución hidrostática de presiones, donde el tamaño de la malla hace que la distribución sea más uniforme. El único dato que puede salir del contexto es el resultado en algunos nodos donde las presiones son negativas. El código que se está ejecutando aún no funciona correctamente al 100 % ya que se trata de un código en construcción. Es por ello que aún nos encontremos con pequeños fallos de mallado en las proximidades de los contornos fijos. Sin embargo, aunque a simple vista no se detecte, la presión hidrostática que tiene la lámina de agua es la atmosférica, es decir, cero.

En términos generales, los resultados van resultando más precisos a pesar de que el tamaño mínimo del elemento que hemos utilizado no proporciona una simulación fiable al completo. Todavía se siguen observando irregularidades en la lámina libre, por lo que afecta a la toma de datos de nuestros sensores. Sin embargo, el objetivo no es la captura de resultados totalmente exactos, sino la obtención de datos que resulten fiables para realizar la comparación con el caso en 3D. En la siguiente tabla se muestran resultados de algunos de los sensores en ciertos instantes de tiempos y su correspondiente error relativo referente al caso más preciso. En este caso  $h = 0,3$ .

REGISTRO DE SENSORES					
	0,65	0,55	0,5	0,4	0,3
<b>t = 3 s</b>	7,92654	7,27814	7,77167	7,56305	7,39072
<b>Error relativo</b>	0,07250	0,01523	0,05154	0,02331	
<b>t = 6 s</b>	9,36196	9,1126	9,53929	9,28307	9,23551
<b>Error relativo</b>	-0,01369	0,01331	-0,03289	-0,00514	

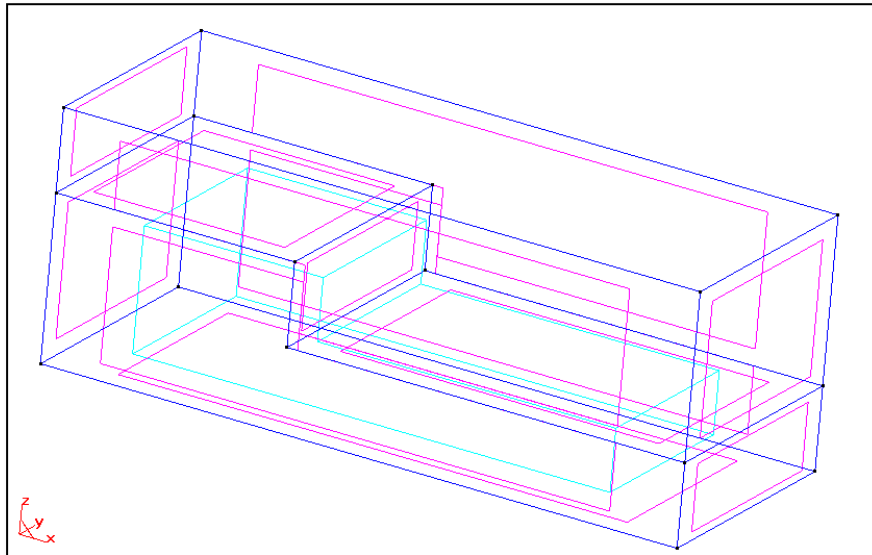
**Tabla 3.2.** Registro de sensores para  $t = 4s$  y  $t = 7s$

En la gran mayoría de los tiempos de paso, los errores relativos disminuyen con el refinamiento de la discretización a excepción de algún caso particular que no se cumple esta tendencia pero que se desprecia al ser alguna situación sin importancia.

Por lo tanto, se observa que en el caso del escalón en 2D los resultados son coherentes y se sigue una tendencia de mejoría cuando la discretización es más precisa. Ahora nos centraremos en el mismo estudio para el caso 3D con el objetivo que los resultados sean lo más parecidos al 2D, demostrando que el código del programa funciona correctamente.

### 3.4. SIMULACIÓN TRIDIMENSIONAL

En el siguiente apartado se ha realizado un estudio semejante al anterior pero con un menor número de casos evaluados debido al aumento del dominio del problema. Ahora la profundidad del escalón está presente y el número de elementos crece considerablemente, por lo que el coste computacional es mucho más elevado. El caso más preciso será el referente a un tamaño de elemento de  $h=0,3$  mientras que el caso  $h=0,4$  no lo hemos tenido en cuenta.

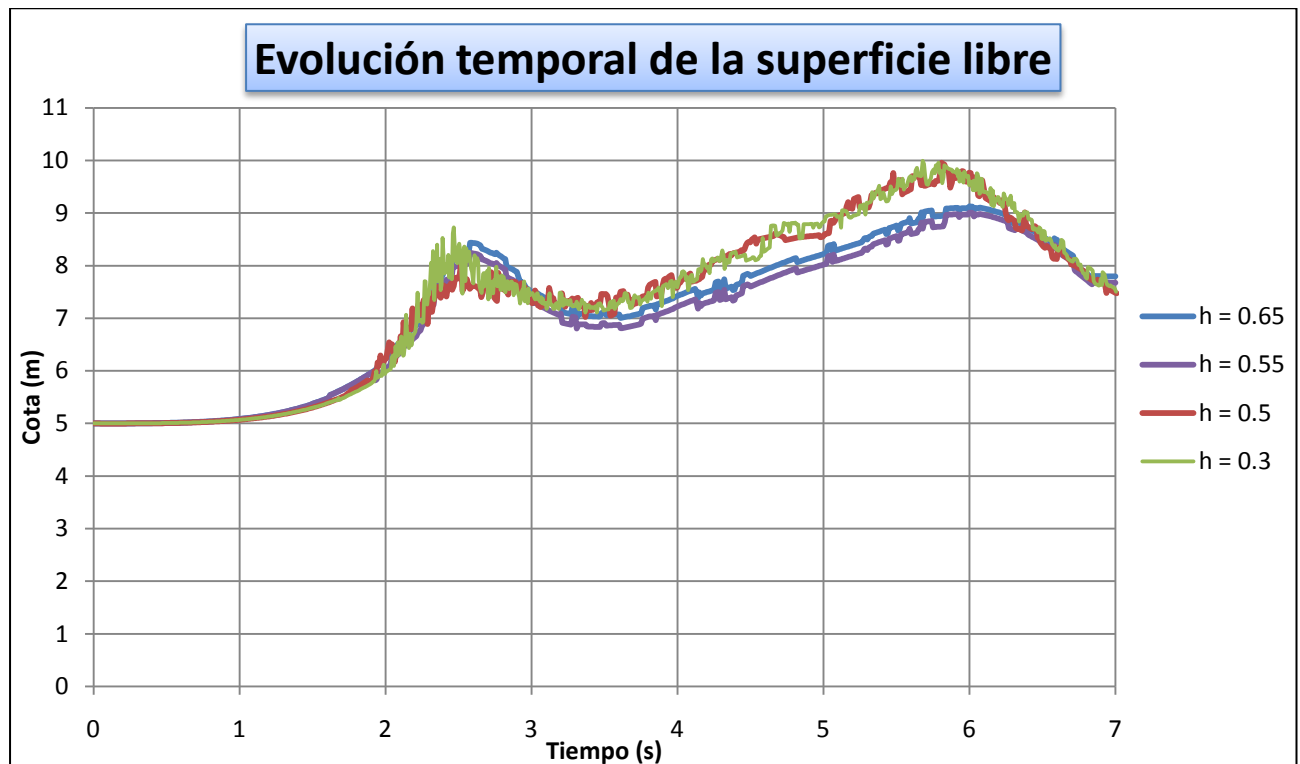


**Figura 3.26.** Geometría de la simulación 3D del escalón de agua

En esta geometría se ha añadido una tercera dimensión que hace referencia a la profundidad. Se ha considerado suficiente una longitud en el eje  $y$  de 15 metros.

Procederemos de igual manera que en el caso bidimensional. Observaremos el comportamiento de los sensores de superficie libre colocados en la misma posición y nos aseguraremos que el comportamiento del fluido resulta válido (distribución de presiones y módulo de velocidad de la superficie libre).

En este caso, la simulación comprende un intervalo de siete segundos dado que el coste computacional es mucho mayor y resulta suficiente para poder realizar la comparación entre ambos casos y corroborar la validez del código.



**Figura 3.27.** Comparativa de la evolución temporal de la superficie libre.

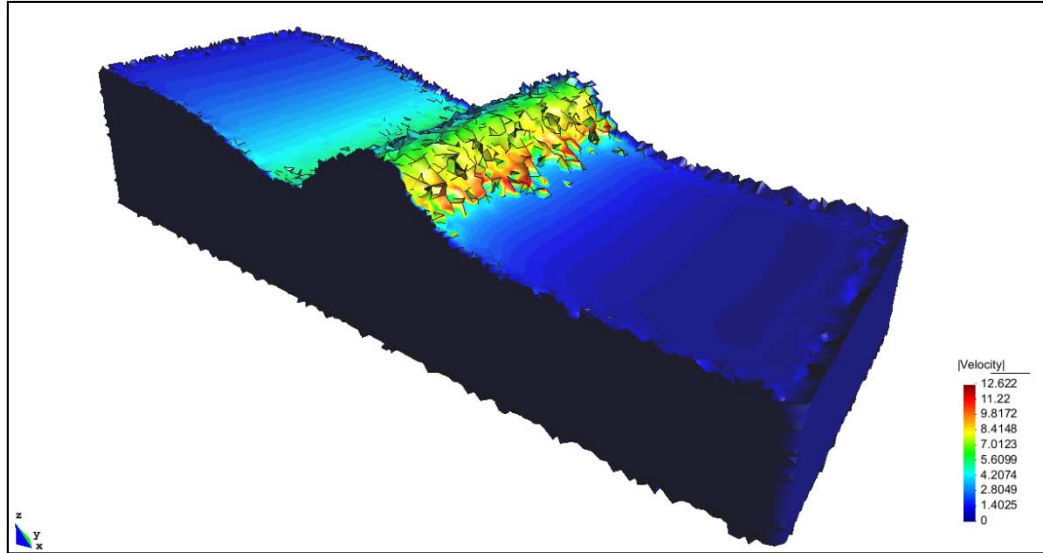
A diferencia del caso bidimensional, no se aprecia la misma mejora en la continuidad del registro de los sensores. No se aprecia una disminución de cambios bruscos del registro de cotas debido al aumento de la calidad en la discretización.

Sin embargo, los resultados, a priori, son satisfactorios dado que se aprecia una tendencia a la estabilidad de la solución, tal y como se observa en los casos  $h = 0,5$  y  $h = 0,3$ .

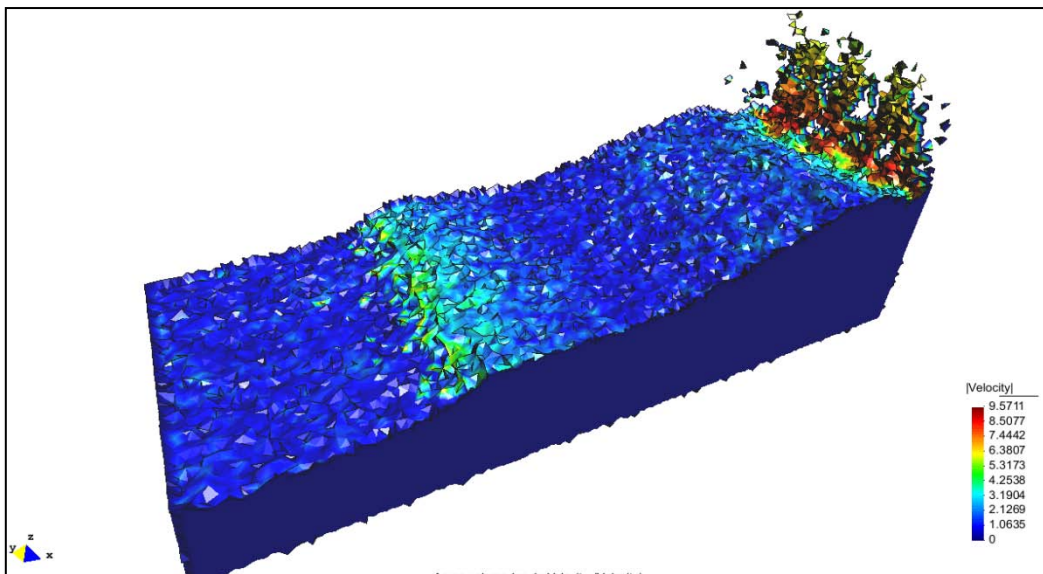
Una vez extraigamos los resultados gráficos de la simulación se desarrollarán las respectivas conclusiones al final del apartado.

### 3.4.1. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presenta algunos de los resultados obtenidos para la simulación tridimensional del escalón de agua con un tamaño de malla de 0,3.



**Figura 3.28.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 1,7$  s



**Figura 3.29.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 5,2$  s



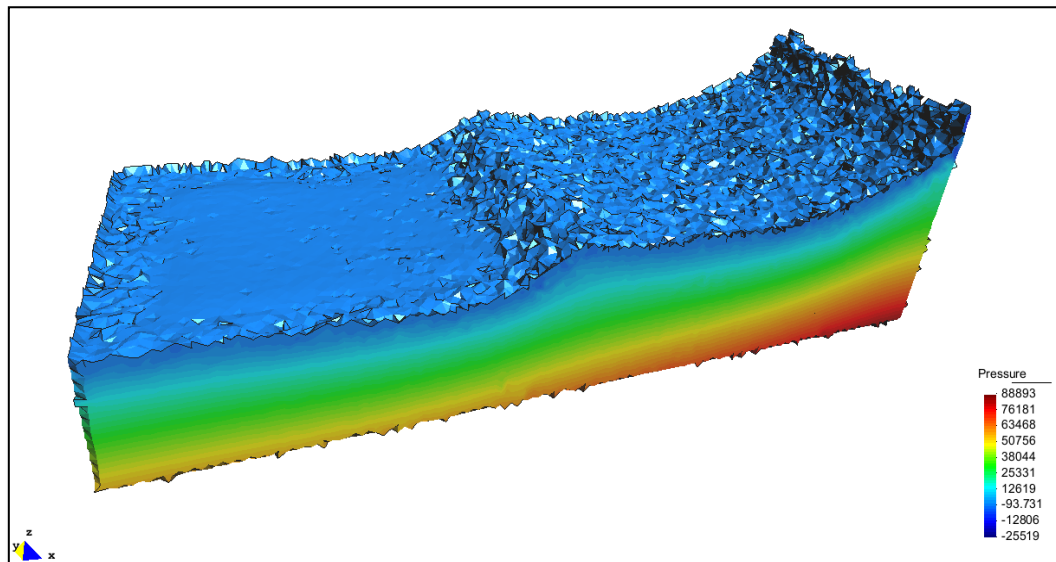


Figura 3.30. Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 3,44$  s

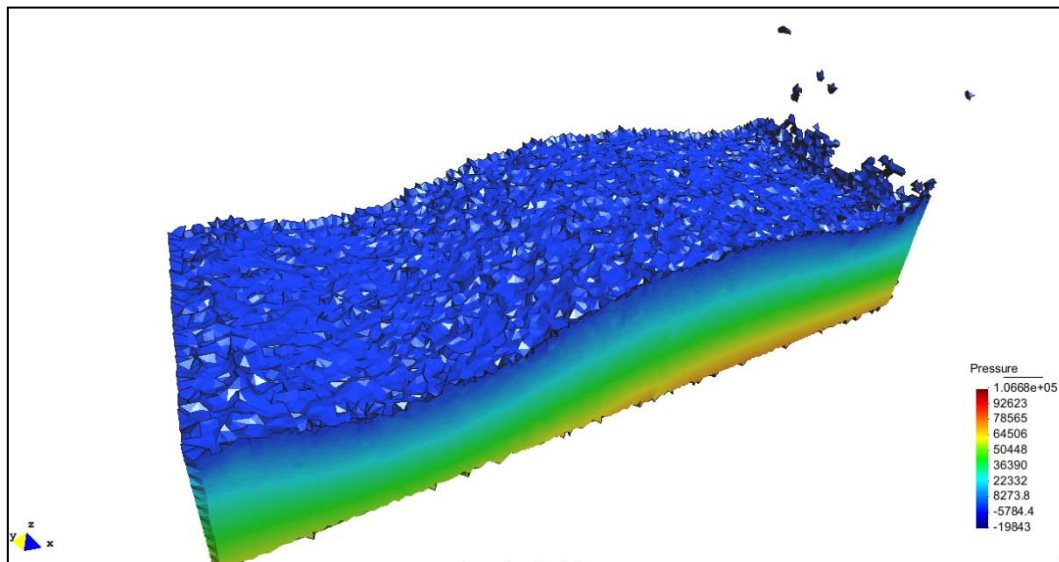


Figura 3.31. Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 6,96$  s

De forma semejante al escalón bidimensional, la disminución del tamaño de malla proporciona una solución visual más refinada, con una distribución de presiones más uniforme y una superficie libre de agua mucho más regular.

Por otra parte, se observa que una mejora en la discretización del problema proporciona cotas de la lámina de agua mayores. Este efecto resulta más notable cuando la ola impacta por segunda vez sobre la pared derecha en el segundo de simulación  $t = 6$  s, aproximadamente.

Los registros de sensores que hemos obtenido, tanto en 2D como en 3D, presentan, en algunos puntos en particular, pequeñas oscilaciones bruscas que

discrepan de lo que en realidad sucede. Este hecho se debe al algoritmo mediante el cual los sensores miden la cota de la superficie libre. En el punto donde se coloca el sensor, se recogen los datos de todos aquellos nodos que se encuentren dentro de un radio designado en el programa. De todos aquellos puntos, PFEM sólo se queda con aquellos que identifique como nodos que se encuentran en la superficie libre. Finalmente, se interpolan los datos de las cotas a izquierda y derecha del sensor obteniendo un valor determinado. Es por este motivo que los sensores midan a la vez la cota de superficie libre y la de pequeños volúmenes huecos en el interior de fluido y de salpicaduras. Como consecuencia, se registran estos descensos y ascensos bruscos de la superficie libre.

Sin embargo, nuestro interés rige en que ambos estudios sean lo más semejantes posibles. De modo que vamos a realizar una comparativa de los resultados obtenidos con el fin de concluir que el código es correcto y que la simulación tridimensional es válida para el estudio de rebase de diques.

### 3.5. CONCLUSIONES

---

Una vez se ha estudiado el comportamiento de un escalón de agua en un espacio bidimensional y en otro tridimensional, se va a realizar una comparación de los resultados obtenidos y, así, poder demostrar la fiabilidad del código.

En términos generales, existe una gran similitud en ambos casos. Por una parte, los resultados que se obtienen de los sensores en cada caso de mallado son muy parecidos en los dos primeros segundos de simulación. A partir de ese momento, se genera una tendencia opuesta con una mayor dispersión de las cotas obtenidas. El motivo se debe a que a mayor tiempo de simulación, mayor es el volumen de agua que se encuentra en movimiento debido al paso de la primera ola generada por el escalón. Es decir, cada paso de tiempo discurrido significa un aumento del coste computacional para la resolución de las ecuaciones de Lagrange, el movimiento de los nodos de la malla a una nueva posición y la regeneración del mallado. Y, por lo tanto, de aquí se deriva el motivo por el cual los resultados son ligeramente diferentes entre cada tipo de discretización llevada a cabo.

Sin embargo, este hecho no implica la invalidez del código ya que sucede de igual manera tanto en el caso bidimensional como en el tridimensional.

Otro aspecto destacable es la oscilación que se ha registrado en algunos de los sensores en determinados instantes de tiempo. No obstante, no va a ser un indicador de que el programa no funcione correctamente. Para que el programa ejecute el caso de estudio, se le ha de asignar un paso de tiempo con el que el código tendrá que establecer el nuevo estado en que se encuentra. De esta manera, obtendremos los resultados para cada paso de tiempo que hayamos determinado. Sin embargo, hay momentos en que el código necesita menos tiempo del que hemos establecido para realizar una nueva iteración, motivo por el cual se registra una mayor oscilación entre los resultados de la cota de la superficie libre.

Por último, la representación del registro de los sensores nos lleva a la conclusión de que se obtienen mayores cotas en el caso tridimensional tal y como se puede apreciar en la *figura 3.32*.

En el primer caso, las ecuaciones del movimiento del fluido sólo dependen de las variables  $x$  e  $y$ . Mientras que en el caso tridimensional se le añade una tercera dimensión, proporcionando una simulación más cercana a la realidad ya que el desplazamiento del oleaje no es completamente rectilíneo sino que se ha de tener en cuenta el movimiento transversal que se produce.

Por este motivo, la interacción que se produce entre el frente de ola longitudinal y los movimientos transversales provocan un aumento de la altura del oleaje. Esta es la explicación al hecho de que se registre una mayor diferencia de cotas entre los cuatro y seis segundos de simulación. En el siguiente capítulo se explican otras causas que también provocan un aumento de la superficie libre del fluido.

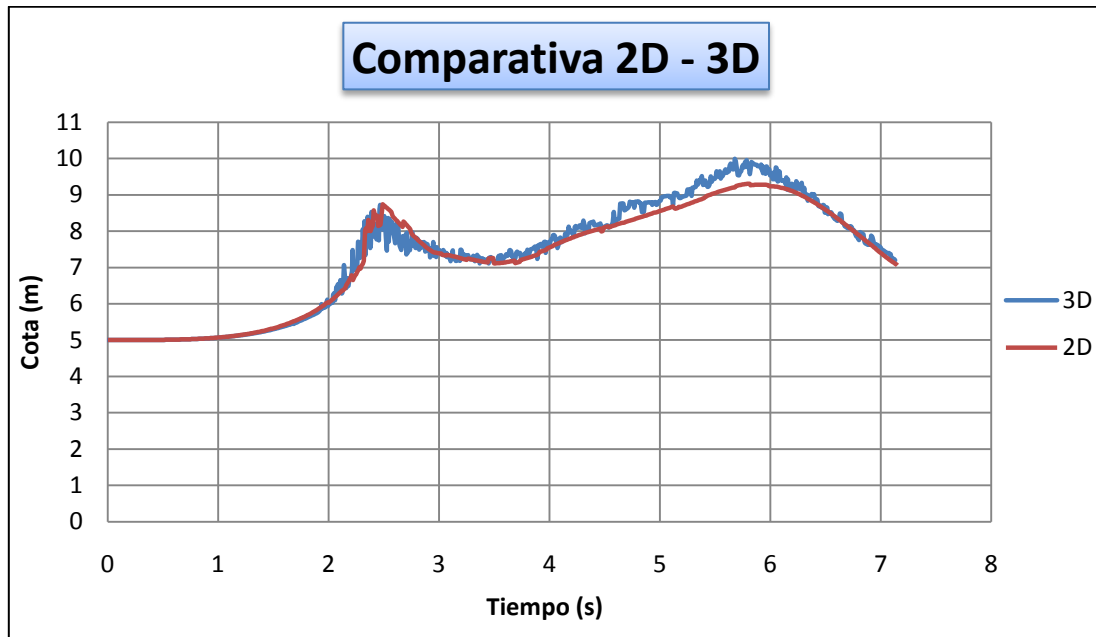


Figura 3.32. Comparativa de resultados 2D – 3D con tamaño de malla  $h = 0.3$

Una vez expuestos todos los resultados obtenidos, podemos concluir que el código resulta válido para el estudio tridimensional del escalón de agua. Las pequeñas diferencias que puedan existir en la medición de los sensores son prácticamente despreciables ya que estamos hablando de centímetros y son debidos al efecto de la tercera dimensión que hemos explicado anteriormente.

Una vez realizado con éxito el caso del escalón, procederemos al estudio del rebase del oleaje sobre un dique del mismo modo.

## *4. REBASE DEL OLAJE SOBRE UN DIQUE*

---

### *4.1. INTRODUCCION*

---

En este capítulo se pretende realizar una comparativa entre la solución que proporciona el código de PFEM para el caso bidimensional y el caso tridimensional en el rebase de un tren de olas sobre un dique en talud.

En estudios anteriores, se ha llevado a cabo el estudio de los fenómenos de refracción, difracción y reflexión cuando un tren de olas incide en la costa o ante cualquier infraestructura marítima. Sin embargo, aún resulta incierta la validez del programa para simular el comportamiento de la dársena de un puerto cuando la ola supera una obra de defensa marítima. En este caso, un dique en talud.

Para ello, hemos realizado una simulación en una geometría real existente de un puerto de China. El oleaje incidente en el trabajo no es el característico de la zona. No son necesarios los parámetros característicos de la ola que se traslada ya que el objetivo es intentar demostrar que el código de PFEM en un sistema tridimensional va a proporcionar resultados fiables.

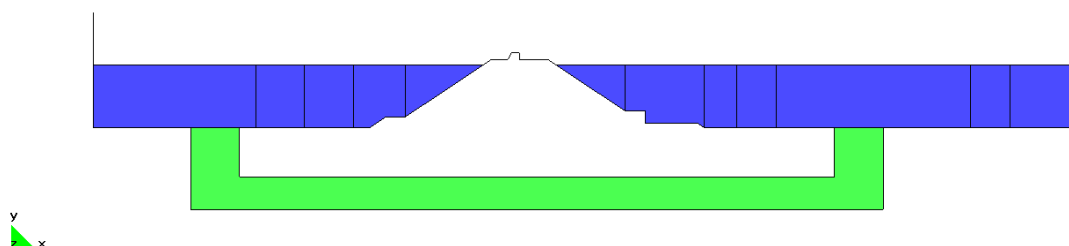
En un primer punto, se ejecutará el mismo caso tanto en 2D como en 3D con las mismas características y, posteriormente, se llevarán a cabo las medidas necesarias, en caso necesario, para mejorar el código y obtener nuestro objetivo final.

## 4.2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El caso simulado llevado a cabo consiste en la generación de un oleaje que sea capaz de rebasar la coronación del dique en talud y, así, alterar el estado en reposo en el que se encuentra la dársena del respectivo puerto.

Se diferencian tres partes: la zona de generación del oleaje, el dique en talud y la dársena. En la primera de ellas, se ha diseñado un canal con una longitud total de 57,5 metros con un volumen de agua en reposo que alcanza una altura de 9,63 metros. El fondo es totalmente horizontal de modo que el oleaje no va a sentir los efectos del cambio de pendiente de la batimetría que se produce en la zona costera en la realidad.

A continuación se presenta el diseño del dique en talud con una altura en coronación de 11,49 metros y una longitud total de 51,51 metros. En el instante inicial, se presenta una zona emergida de 11,25 metros de longitud. Según estos datos, se precisará una ola generada con una altura de 3,72 metros, como mínimo, para que comience el efecto del rebase.



**Figura 4.1.** Diseño geométrico 2D del puerto de estudio.

Seguidamente, se ha colocado la dársena que da continuación a la estructura del dique con una longitud total de 42,5 metros. Se trata de una zona muy importante en nuestro estudio ya que es donde vamos a obtener los datos para poder llevar a cabo la comparativa. En su extremo se ha colocado una pared de 17,63 metros de altura para evitar una posible pérdida de volumen de agua debido al choque que se produce entre la ola y la pared de la dársena. Para minimizar aún más este efecto, se ha diseñado una zona de disipación desde la pared hasta una longitud de 10 metros hacia dentro. En este tramo, la viscosidad del agua se vuelve más elevada de manera que la velocidad disminuye de una forma considerable y muy rápidamente. Por lo tanto, el choque que se produce es menos brusco y la pérdida de agua, mucho menor.

Por último, nos encontramos con el generador del oleaje. Se trata de una barra transversal colocada en el extremo derecho del dominio que ejerce dos funciones. En primer lugar, que no se escape el agua gracias a su función como pared con una altura igual a la del extremo izquierdo. En segundo lugar, tal y como bien dice su nombre, genera el oleaje. Para ello, se ha diseñado colocando su centro de rotación en su misma base con una velocidad angular impuesta de 0,26 rad/s alrededor del eje z y un periodo de rotación de 6.0 segundos. En el caso tridimensional, el centro de rotación ya no es la línea, sino que es establece el centro de rotación como la línea de

base del generador con la misma velocidad angular pero en signo negativo y alrededor del eje y debido a la colocación de los ejes.

El último elemento que se observa en el diseño geométrico de la figura 4.1 es el canal de regulación que se encuentra en la parte inferior del dique. Se trata de un conducto que permite la recirculación del agua a la zona de generación del oleaje. Este hecho se producirá en el momento que la primera ola rebase el dique ya que se generará un gradiente de presiones provocando un movimiento del fluido hacia la zona de menor presión. Es un recurso que se ha aplicado dado que el volumen de agua es finito. De esta manera conseguimos que el tiempo máximo de simulación sea muy elevado.

A diferencia del apartado 3, el tamaño de la malla va a ser variable en función de la zona donde nos encontremos. El código de PFEM nos permite caracterizar cada una de las zonas del dominio con un diferente tamaño del elemento discretizante. Se han considerado las zonas más alejadas del dique tanto en la zona de generación de oleaje como en la dársena como las menos solicitadas a un mayor refinamiento para la obtención de resultados. Nuestro interés se centra en conseguir un alto grado de precisión en el paso sobre el dique ya que es donde va a haber una mayor alteración de las propiedades de cada uno de los nodos que conforman el fluido. De este modo, la dispersión de los resultados respecto a un caso real sería mucho menor.

Por lo tanto, se ha decidido discretizar toda la zona del dique con un tamaño de malla de 0,25 acompañado de una transición del tamaño del elemento a medida que nos alejamos hasta llegar al tamaño de malla máximo de  $h = 1.5$  correspondiente a las zonas anteriormente mencionadas (véase en la figura 4.2). El canal de recirculación se discretizará con un tamaño de elemento  $h = 2.1$ . El hecho de poder diferenciar zonas en función de nuestra necesidad en la exactitud de resultados, proporciona un gran ahorro de los recursos del procesador y de tiempo a la hora de ejecutar el caso de estudio.

Para finalizar la descripción del problema, simplemente mencionar los sensores de superficie libre que nos permitan realizar la comparación entre el caso bidimensional y tridimensional. En este caso, se han colocado seis sensores en total. Dos en la zona de generación del oleaje antes de llegar a la zona emergida del dique y los cuatro restantes en la zona de la dársena. Para el caso tridimensional, los sensores se encuentran en las mismas posiciones pero desplazadas una distancia igual a la mitad de la profundidad de la tercera dimensión que se ha incluido, y que corresponde al eje de simetría.

CASO BIDIMENSIONAL	
	X (m)
Sensor 1	10
Sensor 2	20
Sensor 3	33
Sensor 4	45
Sensor 5	75
Sensor 6	81.83

CASO TRIDIMENSIONAL		
	X (m)	Y (m)
<b>Sensor 1</b>	10	5.5
<b>Sensor 2</b>	20	5.5
<b>Sensor 3</b>	33	5.5
<b>Sensor 4</b>	45	5.5
<b>Sensor 5</b>	75	5.5
<b>Sensor 6</b>	81.83	5.5

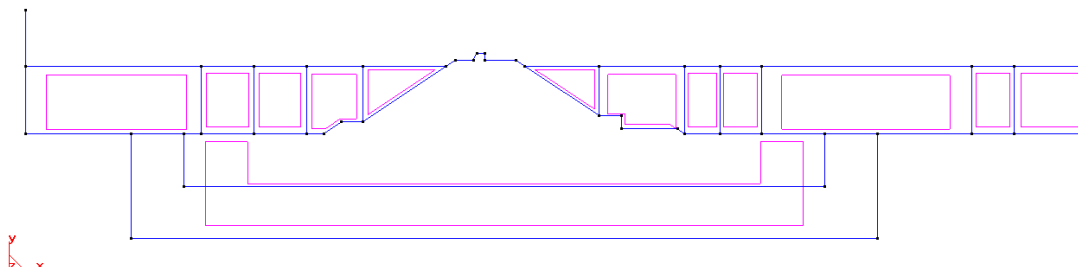
**Tabla 4.1.** Posición de los sensores de superficie libre

De esta manera, vamos a proceder a realizar la comparativa ejecutando cada uno de los casos en idénticas condiciones.



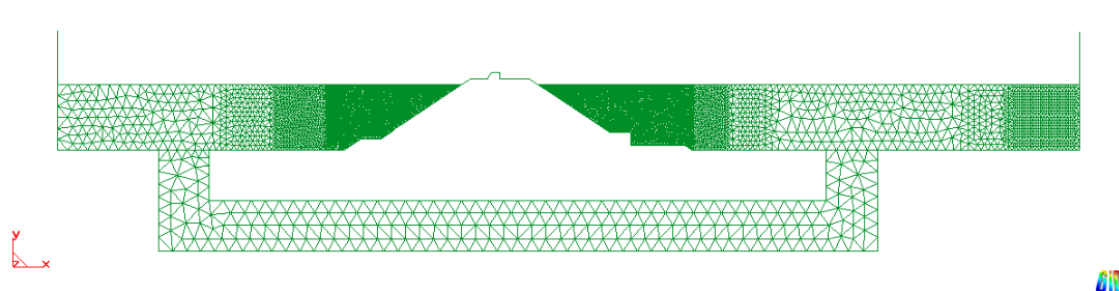
### 4.3. SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DEL PUERTO

A continuación se muestran los resultados obtenidos a partir de la simulación realizada en 2D. La geometría del dominio se encuentra dividida en diversos tramos debido al mallado variable que se ha llevado a cabo.



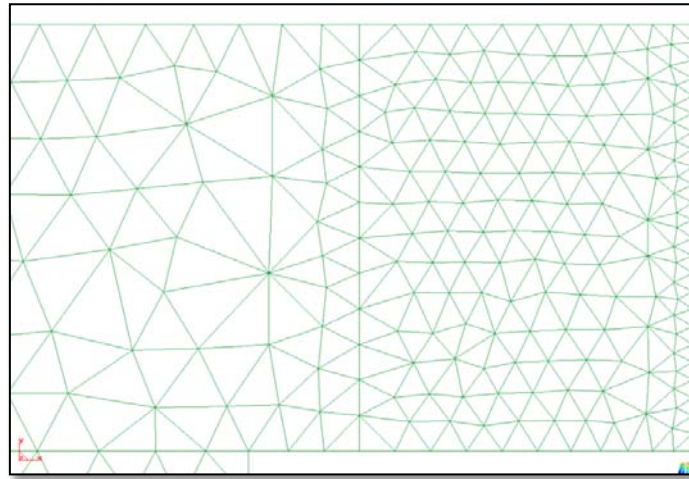
**Figura 4.2.** Geometría de la simulación 2D del puerto de estudio.

En la siguiente figura se muestra la discretización del problema. La división del mallado se ha dividido según los dos ejes  $x$  e  $y$ . La cota  $y=0$  define la superficie de fondo de la dársena, dique y zona de generación. Por debajo de dicho valor, se procede a un mallado continuo de  $h = 2,1$ . Para valores positivos, se discretiza según el eje  $x$ , comenzando desde el extremo izquierdo con un valor de  $h = 1,0$  y reduciendo progresivamente hasta  $h = 0,25$  pasando por valores de  $h = 0,8$  y  $h = 0,4$ . A partir de la zona de coronación del dique, se discretiza de la misma manera acabando en la zona del generador con unos tamaños de  $h = 1$  y  $h = 0,5$ .



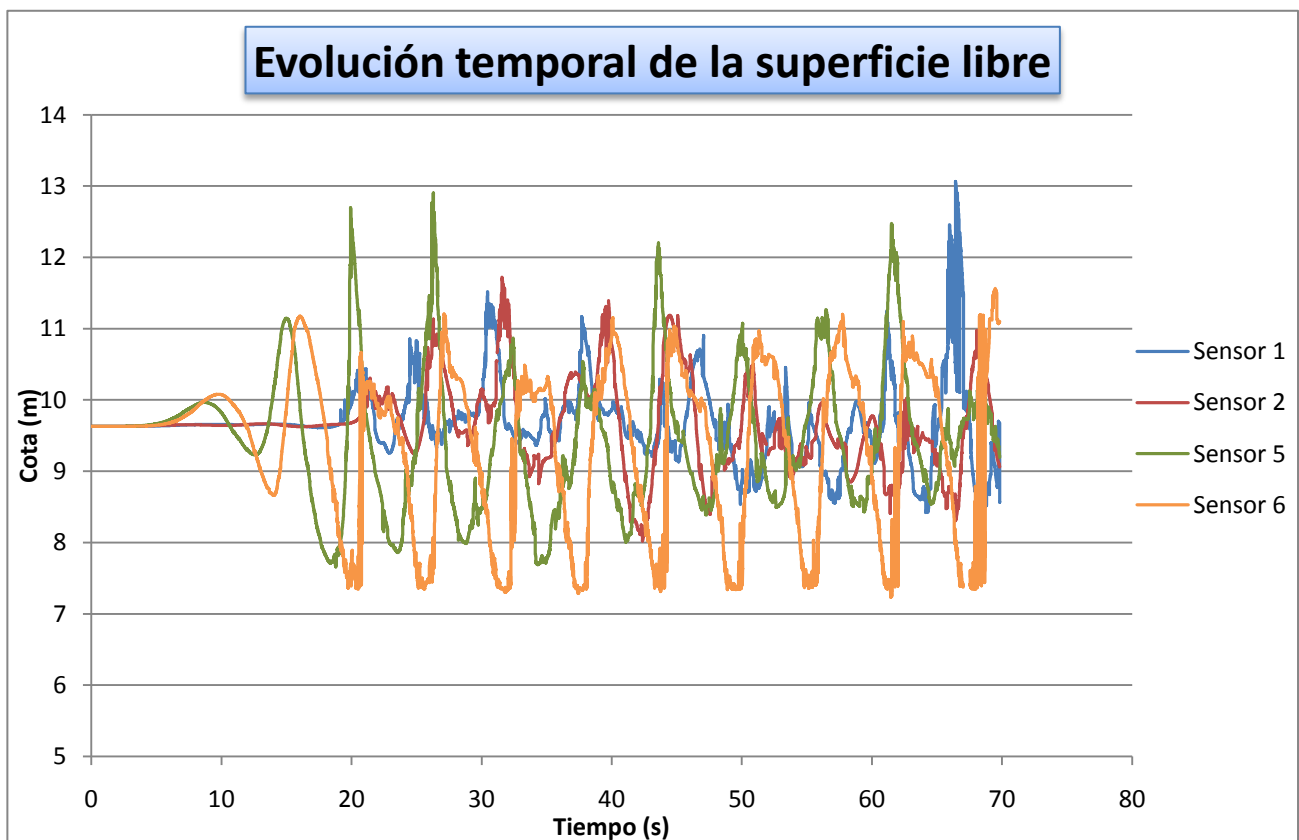
**Figura 4.3.** Discretización del dominio del puerto de estudio.

Todas las divisiones transversales que definen la superficie de contacto entre diferentes tamaños de elementos están malladas con el elemento de menor tamaño. Así se consigue una buena transición del mallado de la zona local y se evita una importante pérdida de nodos en caso de mallar con el de mayor tamaño. Este efecto puede apreciarse en la siguiente figura.



**Figura 4.4.** Zona de transición entre dos zonas de mallado diferentes.

Una vez recogidos los resultados del caso en 2D, se muestra a continuación la evolución temporal de la superficie libre en cuatro posiciones diferentes dadas por los sensores.



**Figura 4.5.** Comparativa de la evolución temporal de la superficie libre de cada sensor.

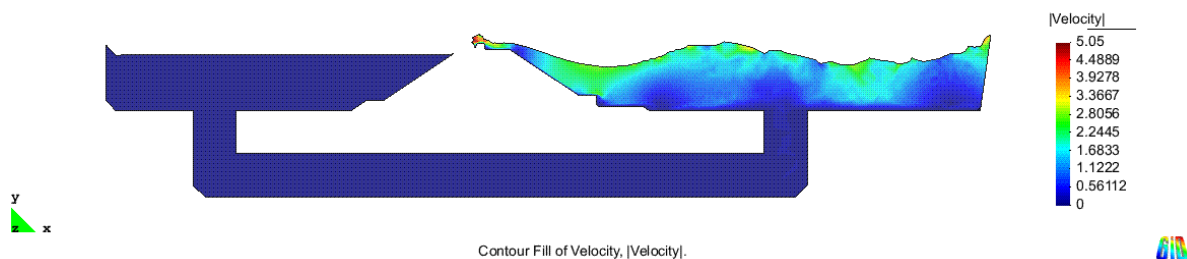
Es importante mencionar que se han despreciado los resultados obtenidos de dos de los sensores debido a que se encuentran en una posición problemática, es decir, en el plano vertical que da entrada al canal de recirculación. El paso del agua por el conducto ha provocado que se generen, en instantes puntuales de tiempo, espacios vacíos donde no hay ningún nodo referente al fluido. El código de PFEM identifica a los nodos frontera de este espacio vacío como nodos de superficie libre al no existir ningún otro elemento en un radio determinado por el programa. Como consecuencia, al interpolar el valor de la cota de la superficie libre, toma un valor que es muy inferior al de la realidad llegando incluso a ser negativo. Por este motivo, se desprecian los resultados de los sensores 3 y 4.

Como bien se aprecia en la *figura 4.5*, los sensores 5 y 6 tienen un comportamiento muy semejante al oleaje existente estableciendo una periodicidad uniforme y distinguiéndose perfectamente los senos y las crestas de las olas que transcurren por la zona de generación de oleaje antes de impactar contra el dique.

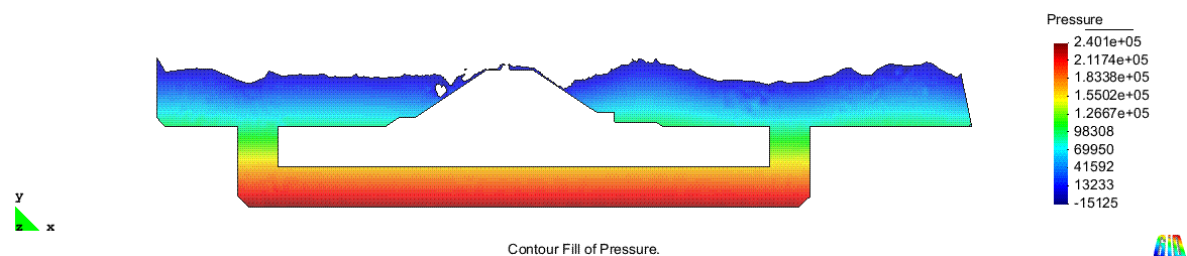
Respecto a los sensores 1 y 2, que se encuentran en la zona de la dársena, el comportamiento de la superficie libre es más irregular ya que la ola, al impactar contra el dique, cambia totalmente sus características. Esta intrusión de volumen de agua sobre la zona en reposo provoca una gran agitación alcanzando incluso los 3 metros por encima de la cota inicial.

### 4.3.1. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

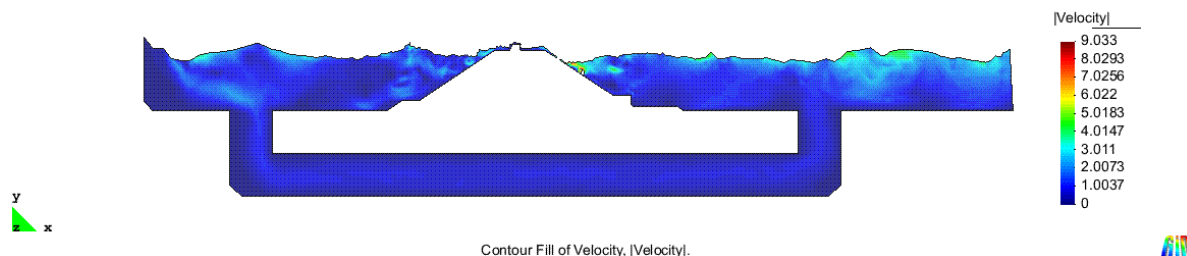
A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos para ciertos instantes de tiempo.



**Figura 4.6.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 17,44$  s



**Figura 4.7.** Perfil de la superficie libre con la distribución de presiones para  $t = 54,88$  s



**Figura 4.8.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 92,80$  s

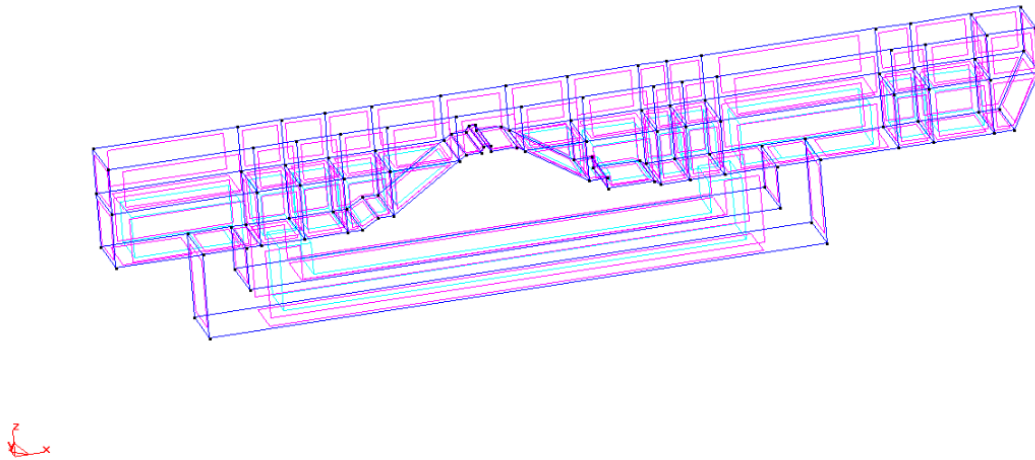
Las tres figuras anteriores representan tres instantes de tiempo de gran importancia en nuestro estudio, como es el momento del primer rebase, la agitación de la dársena y los instantes finales de la simulación. Con el uso del mallado variable hemos conseguido unos resultados excelentes, como se puede apreciar en la uniformidad de la ley de presiones hidrostáticas.

Sin embargo, este no es nuestro objetivo, sino ejecutar el caso tridimensional y observar si el código de PFEM puede proporcionar unos resultados semejantes sin que el coste computacional se vaya de nuestras manos.

#### 4.4. SIMULACIÓN TRIDIMENSIONAL DEL PUERTO

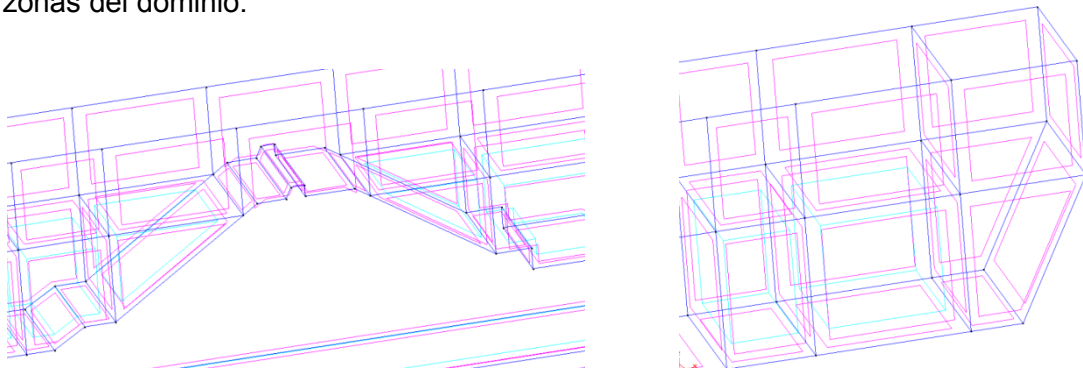
Llevar a cabo esta simulación en 3D es cuestión de realizar de forma análoga el mismo proceso que el anterior apartado con la inclusión de un tercer eje. Se ha decidido extruir la geometría del puerto una distancia aproximada a la altura del dique en su coronación, es decir, 11 metros. En este caso, se ha añadido un contorno alrededor del canal que no permita la fuga del fluido por los laterales. De igual manera, para el generador, se ha instalado una zona hueca detrás de éste que permita su movimiento oscilante sin perder volumen de agua.

En la siguiente figura se muestra la nueva geometría del puerto para el caso tridimensional.



**Figura 4.9.** Geometría de la simulación 3D del puerto de estudio.

En las siguientes imágenes, veremos con mayor detalle la geometría de diversas zonas del dominio.



**Figura 4.10.** Detalle de la geometría en la coronación y el generador de oleaje.

Respecto al mallado del problema, resulta obvio que nos vamos a encontrar con más problemas que en el caso bidimensional. Añadir una nueva dimensión al caso generará la introducción de un gran número de nodos y elementos generando un mayor coste computacional a la hora de ejecutar los casos.

El criterio a seguir es idéntico al anterior, incluidas las paredes laterales y la zona hueca del generador que se han colocado posteriormente. Para dar una idea de la repercusión que provoca realizar un caso en tres dimensiones, hemos hecho una rápida comparación entre el número de elementos en cada uno de los casos.

	2D	3D
<b>Nº de nodos</b>	8235	412.652
<b>Nº de elementos</b>	15.413	2.112.306

**Tabla 4.2.** Comparativa 2D y 3D.

Según la tabla adjunta, el número de nodos se multiplica por un factor 50 mientras que el número de elementos aumenta con un factor multiplicador de 137. Gracias a estos datos queda clara la gran diferencia en el tiempo de simulación necesario entre un caso en 2D y 3D, respectivamente.

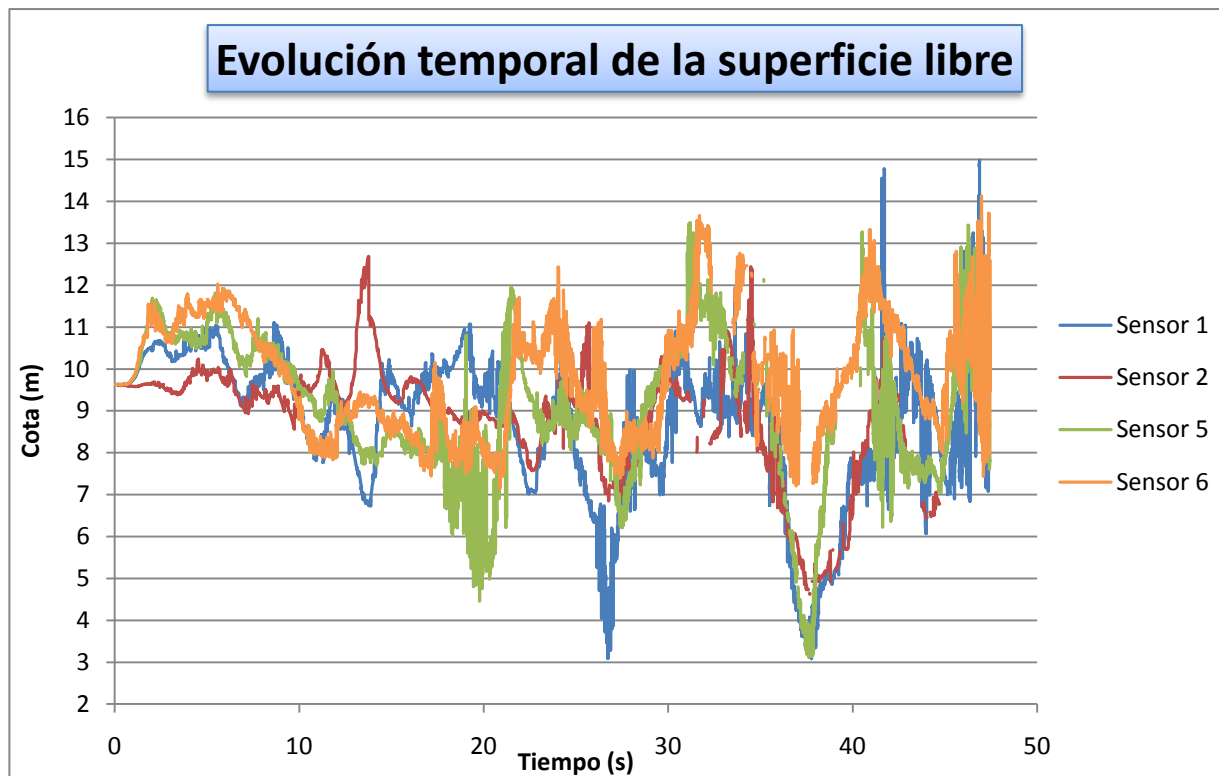
Finalmente, se presenta la discretización del caso de estudio.



**Figura 4.11.** Discretización del puerto de estudio en 3D.

El problema lo podemos catalogar de grandes dimensiones ya que hablamos de más de 150 metros de longitud y 11 metros de ancho. Estas características han condicionado que el coste computacional haya resultado tan elevado. Para darse una idea, realizar una simulación de un minuto aproximadamente, se traducía en varias semanas de cálculo ininterrumpido.

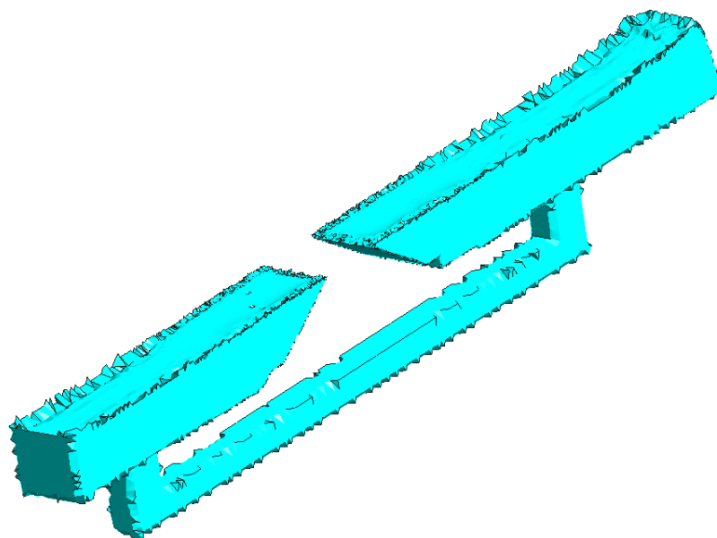
Una vez realizado el cálculo, se van a presentar los resultados obtenidos por cada uno de los sensores. Dado que nos encontramos en las mismas condiciones geométricas y los sensores están fijados en las mismas posiciones que en el 2D, hemos procedido a despreciar los resultados del sensor 3 y 4, siguiendo el mismo criterio anterior.



**Figura 4.12.** Comparativa de la evolución temporal de la superficie libre de cada sensor.

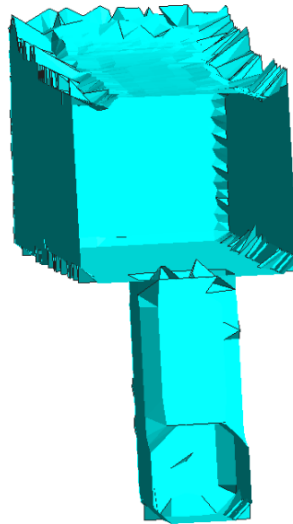
Lo primero de lo que nos damos cuenta es que los resultados no guardan ninguna semejanza con los obtenidos en el caso 2D. Se observa como desde el primer instante los sensores recogen datos de movimiento del fluido en cada una de las zonas de los cuatro sensores independientemente de aquellos que se encuentren más cerca de la zona de generación.

En un principio, este hecho parece ilógico dado que la primera ola aún no ha llegado a alcanzar el dique por lo que el agua debería encontrarse estable. Sin embargo, existe una razón por la cual se registran estos movimientos iniciales.



**Figura 4.13.** Detalle del contacto fluido - pared.

En la figura anterior se representa el estado de volumen del fluido en los instantes iniciales en los que se genera la primera ola. Si prestamos atención a la zona de contacto entre el fluido y las paredes laterales destaca la presencia de una parte de volumen con una cierta inclinación. Cada uno de los nodos que discretizan el entorno tienen objetivo de buscar una conexión al nodo más cercano. Por este motivo, en las zonas cercanas a las paredes, los nodos que conforman el fluido se unen a aquellos pertenecientes al contorno fijo para conformar una red de elementos que discreticen todo el dominio. Esta unión es la causante de esta zona con inclinación que, a su vez, provoca desde el primer instante que la masa del fluido empiece a moverse.



**Figura 4.14.** Plano de corte en  $x = 20$  m.

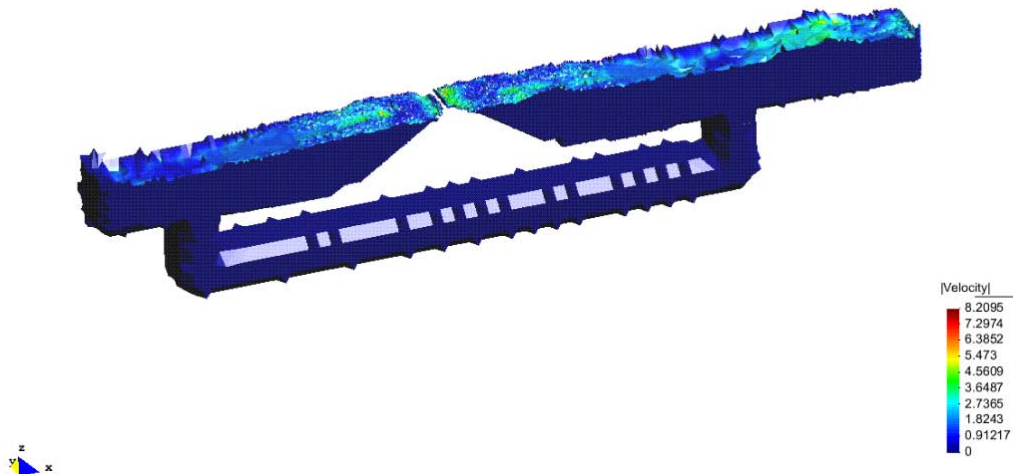
Este efecto será más destacable cuanto mayor sea el tamaño del elemento con el que discretizamos generando una mayor diferencia de resultados entre la simulación y la realidad. En nuestro caso, con el tamaño de malla usado, se registran ascensos de la superficie libre por encima de los 2 metros cuando en la realidad el fluido tendría que estar prácticamente en reposo. La única solución que tenemos a nuestro alcance es la de usar un mayor refinamiento de la malla de modo que este efecto no afecte de forma considerable el volumen del fluido. En el siguiente apartado, se llevarán a cabo las medidas oportunas para intentar minimizar estos efectos.

Por otra parte, nos hemos visto obligados a ignorar algunos de los resultados debido al mismo problema que ocurría con los otros dos sensores que no hemos incluido en la *figura 4.10*. El hecho que exista una nueva dirección del flujo, ha ocasionado un mayor número de vacíos en el canal de recirculación. De manera que al interpolar la cota del sensor, se cogían datos que no reflejaban lo que realmente sucede.

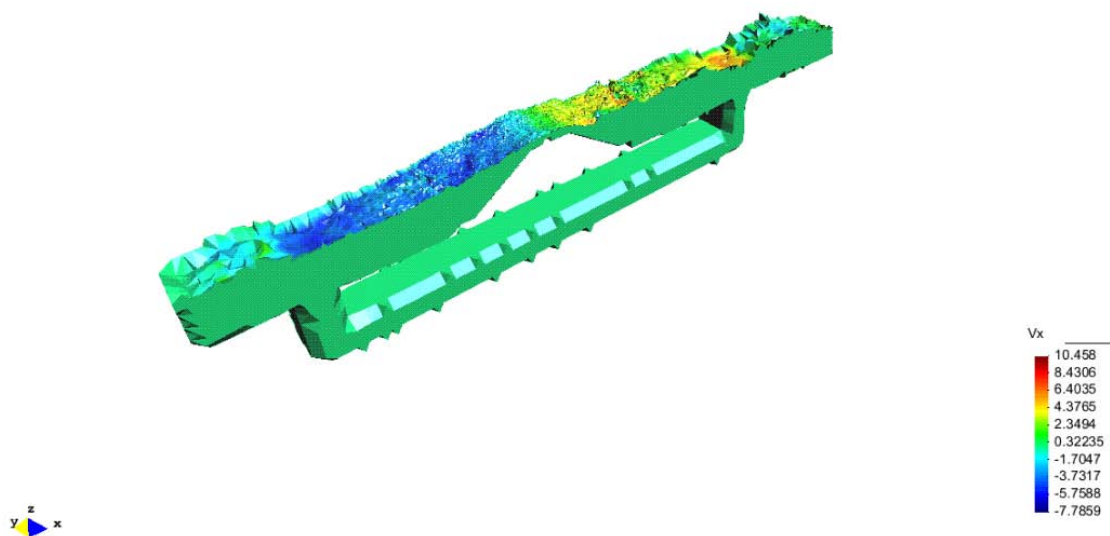


#### 4.4.1. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

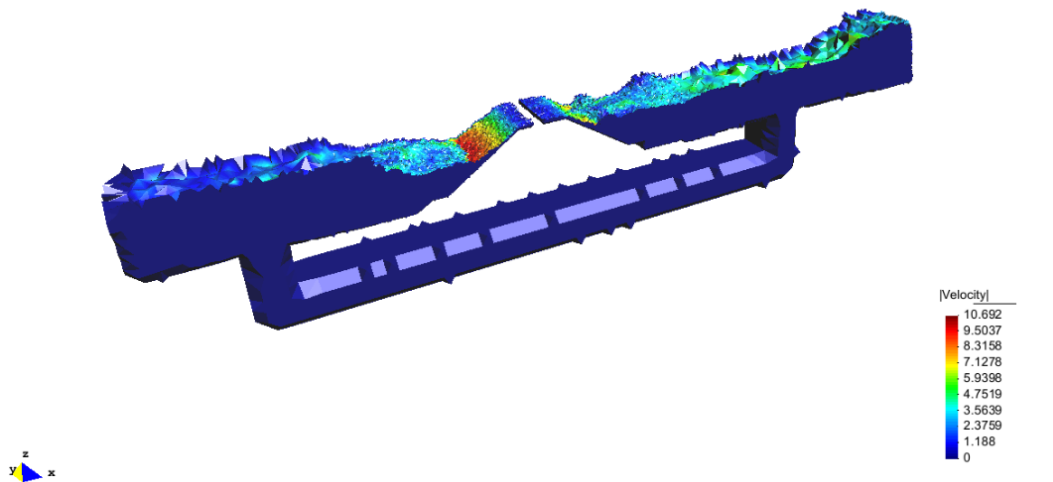
A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos en diferentes pasos de tiempo.



**Figura 4.15.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 3$  s



**Figura 4.16.** Perfil de la superficie libre con la velocidad longitudinal  $V_x$  (m/s) para  $t = 7.84$  s



**Figura 4.17.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 17.45$  s

Como se demuestra en las anteriores figuras, el efecto del problema del mallado es alarmante, produciendo grandes oscilaciones e incluso ocasionando un pequeño rebase sin la ayuda de una ola incidente. Como veremos a continuación, la comparativa con el caso bidimensional guarda muy poca relación.

#### 4.5. COMPARATIVA DEL PUERTO EN 2D Y 3D

La herramienta que nos ayuda a realizar una comparación entre ambos casos es el registro de los sensores. De modo que vamos a contrastar los resultados de un par de ellos. El sensor 1 está situado en la coordenada  $x = 40$  metros, justo detrás de la coronación del dique, mientras que el sensor 5 se encuentra en  $x = 81$  metros, en el plano de inclinación del talud de la zona de propagación del oleaje.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

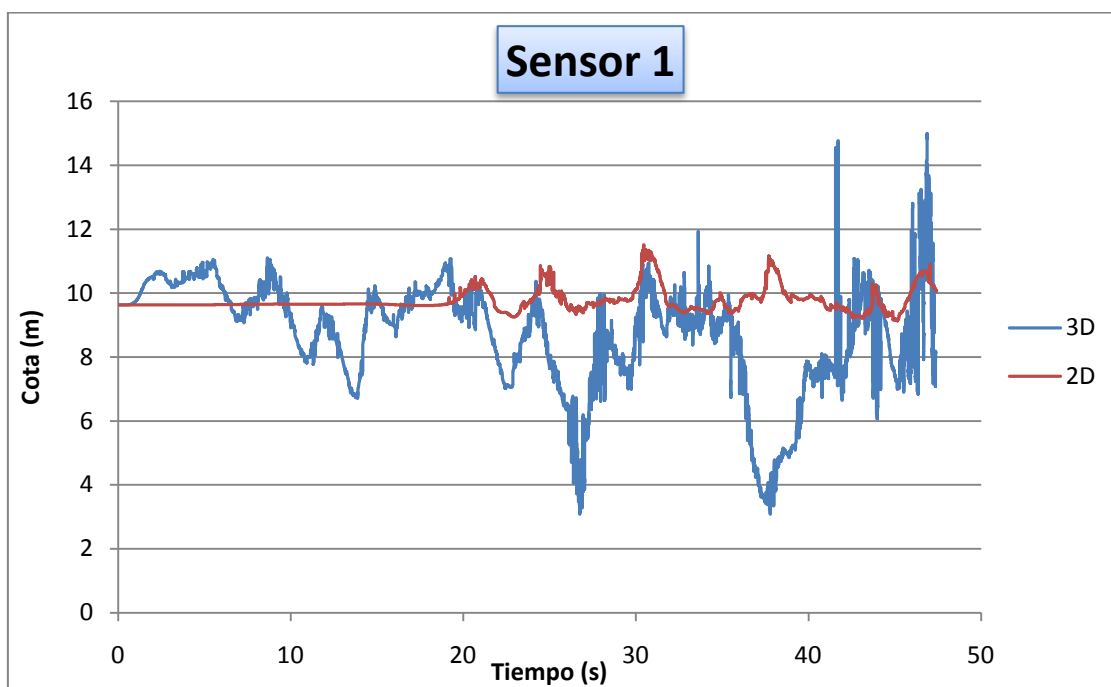


Figura 4.18. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 1.

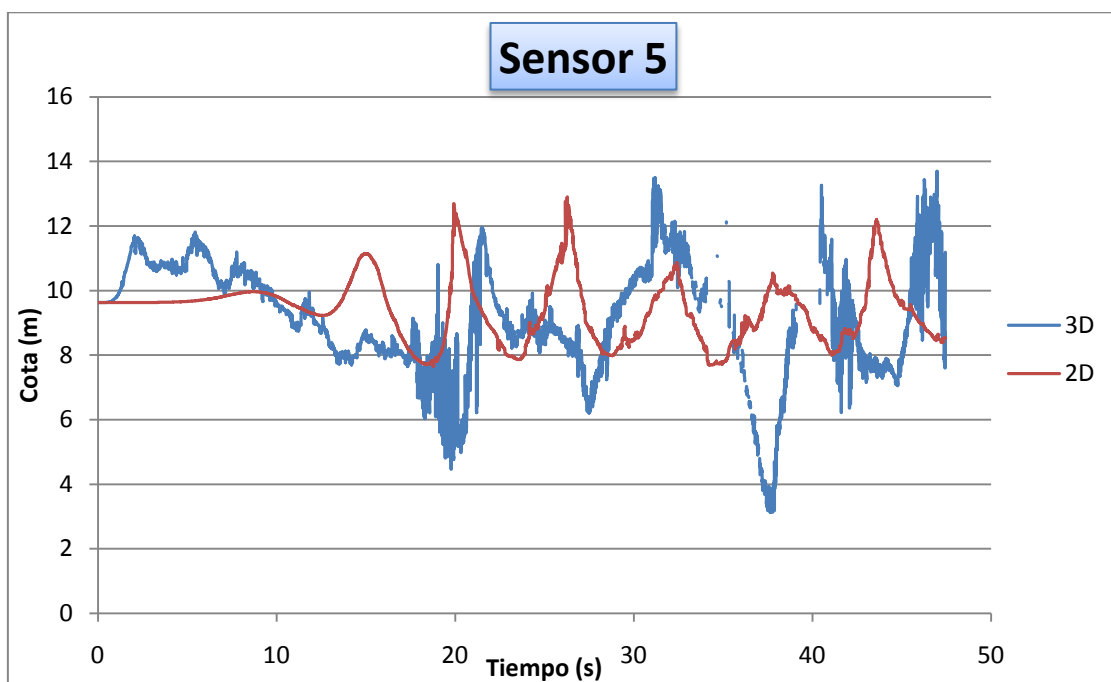


Figura 4.19. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 5.

La comparativa demuestra el problema que antes se había comentado. Tanto en el sensor 1 como en el sensor 5 existe una gran dispersión de resultados entre el caso 2D y 3D. La razón se debe en los instantes iniciales como ya hemos explicado. Se puede ver fácilmente como en el caso bidimensional el sensor apenas registra alteraciones respecto a su cota inicial hasta que llega la primera ola. Obviamente, el tiempo transcurrido es menor en el sensor 5 dado que se encuentra más cercano a la zona de generación. Sin embargo, en el caso tridimensional, la oscilación de la superficie del fluido es constante desde el inicio propiciando una alteración de los resultados cuando la simulación está más avanzada.

De esta comparativa, podemos sacar la siguiente conclusión. En el caso tridimensional es necesario un mayor refinamiento del mallado para que disminuya el efecto de la alteración de la superficie libre antes de producirse el rebase. De esta manera, se intentará que la comparación sea más precisa y similar pudiendo extraer unas conclusiones con una base más firme.

En el siguiente apartado se va a realizar una mejora de la geometría del problema y una mayor refinamiento del mallado para conseguir el objetivo citado.

#### 4.6. MEJORA DE LA SIMULACIÓN DEL PUERTO

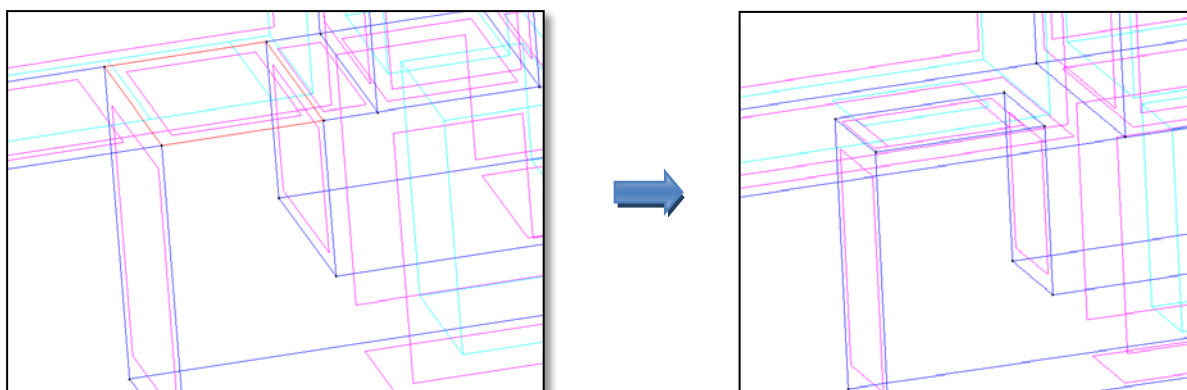
El objetivo de este apartado es realizar una serie de mejoras en nuestro modelo con tal de obtener una mejoría en los resultados que obtengamos. Así, se podrá realizar una comparación en mejores condiciones que nos permita decidir si la simulación tridimensional ejecutada en el código de PFEM es útil para esta clase de estudios.

En primer lugar, se ha realizado un mejor refinamiento en aquellas zonas donde el tamaño de malla era superior a  $h = 1.0$ . Es el caso de la zona central de la dársena y de la zona de generación que incluye la entrada y salida del canal de recirculación.

También se ha efectuado una reducción de  $h$  en todo el canal de modo para reducir la existencia de aquellos espacios vacíos que provocaban una toma de datos incorrecta de los sensores de superficie libre.

Por último, las dimensiones de la entrada del canal se han visto reducidas a más de la mitad. Anteriormente, la superficie del orificio era de  $82.5 \text{ m}^2$  y ahora se ha visto reducida a  $37,5 \text{ m}^2$ . El motivo de esta corrección es la generación de una sobreelevación de la superficie libre que tenía lugar en la zona de salida del canal en el momento que se generaba un flujo importante de agua por el conducto. De esta forma, se reduce el caudal saliente y una menor sobreelevación que modifique los resultados.

A continuación, se muestran la última medida llevada a cabo.



**Figura 4.20.** Detalle de la mejora de la entrada del canal de recirculación

En el caso 2D, la mejora también se lleva a cabo reduciendo el canto del canal tal y como ya hemos visto.

Una vez mejorado el diseño geométrico, se vuelve a ejecutar el caso para observar los resultados obtenidos. Los dispositivos encargados de recoger la información son los sensores 2 y 6, posicionados en la zona de la dársena y en pie de dique de la zona de generación, respectivamente.

En este caso, se han simulado un total de 30 segundos, tiempo suficiente para observar una posible mejoría en el cálculo del problema.

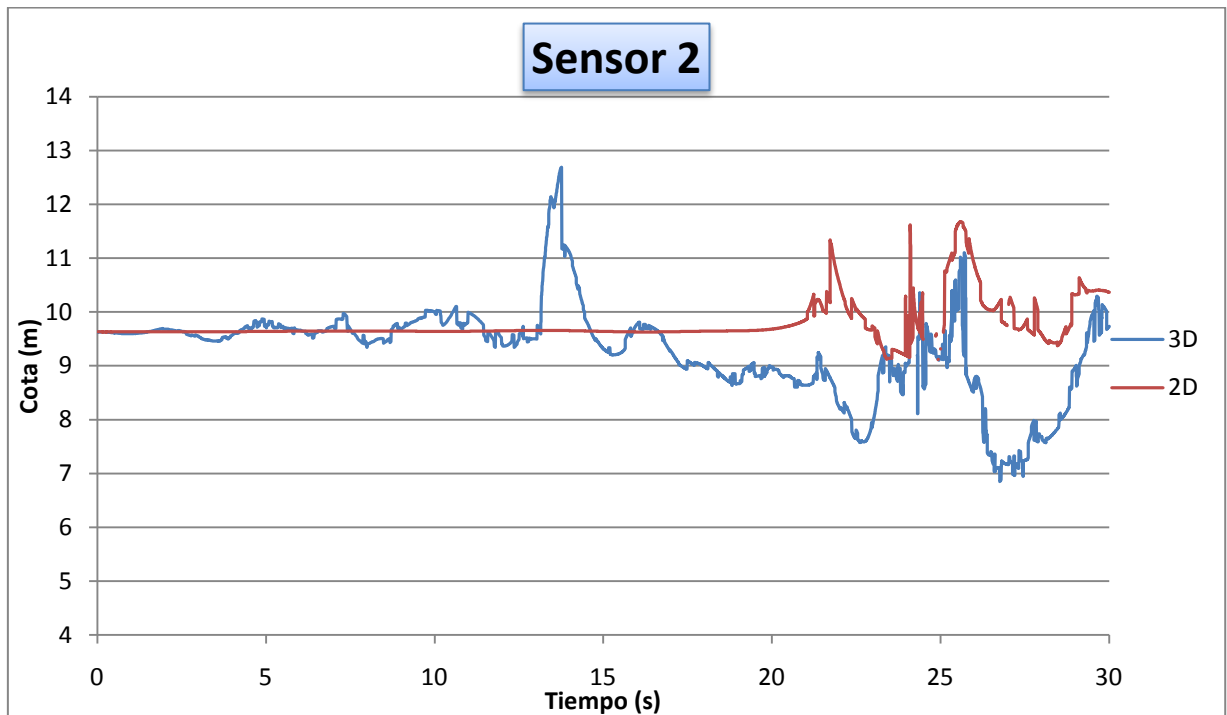


Figura 4.21. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 2.

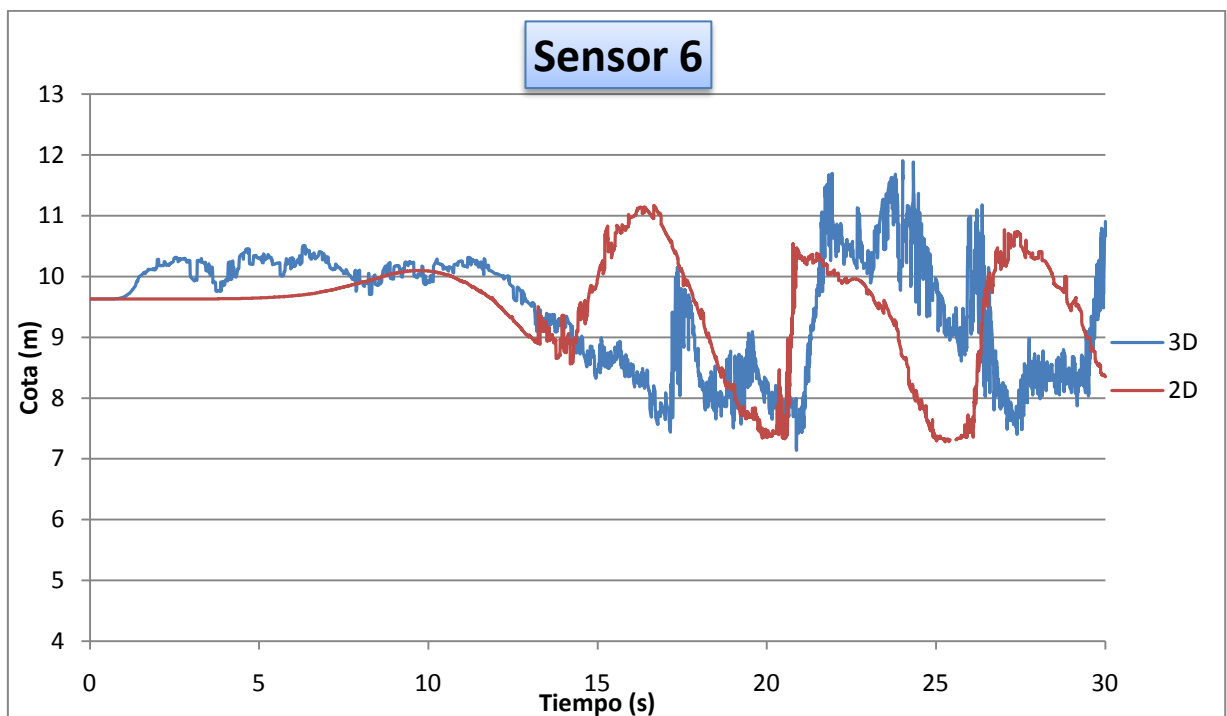


Figura 4.22. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 6.

Tal y como se aprecia, los resultados siguen con la misma tendencia. En los primeros segundos de simulación se precisa una mejora de las oscilaciones debido al tamaño de malla. Sin embargo, la diferencia con el caso bidimensional sigue siendo insalvable. En ciertos instantes de tiempo, existen diferencias superiores a tres metros.

La solución que se plantea a este problema es aumentar de forma considerada el refinamiento de la malla para evitar las oscilaciones en los instantes iniciales. No obstante, este hecho comporta un coste computacional fuera de nuestro alcance ya que el tiempo de cálculo alcanzaría los meses de ejecución.

En último lugar, vamos a realizar una pequeña comparación de la mejora que se ha dado debido al aumento de calidad del refinamiento de la malla. Esto nos dará una idea del salto de calidad que tendríamos que dar en nuestra malla para conseguir unos buenos resultados.

Como el foco del problema de las oscilaciones se centra en los primeros instantes de simulación, sólo nos centraremos en analizar el primer intervalo de 10 segundos.

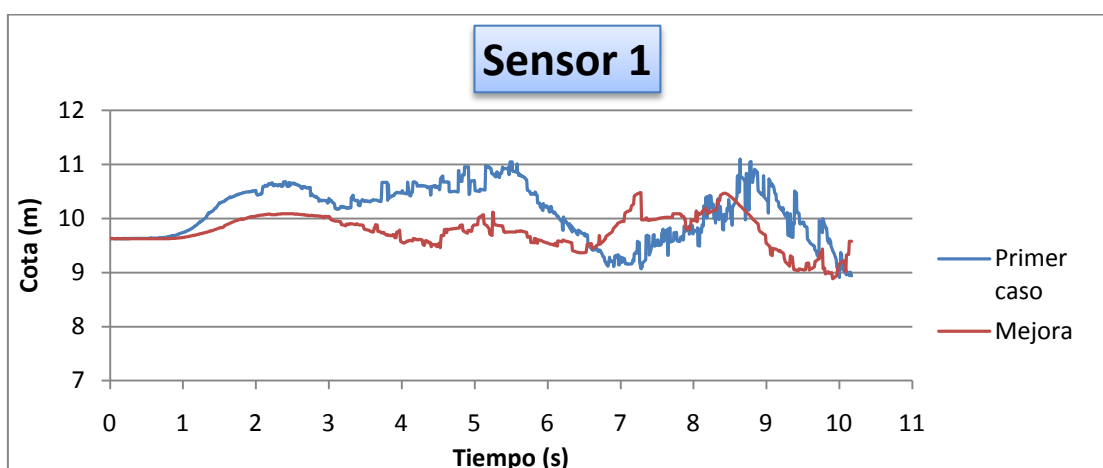


Figura 4.23. Comparativa de resultados 3D del sensor 1.

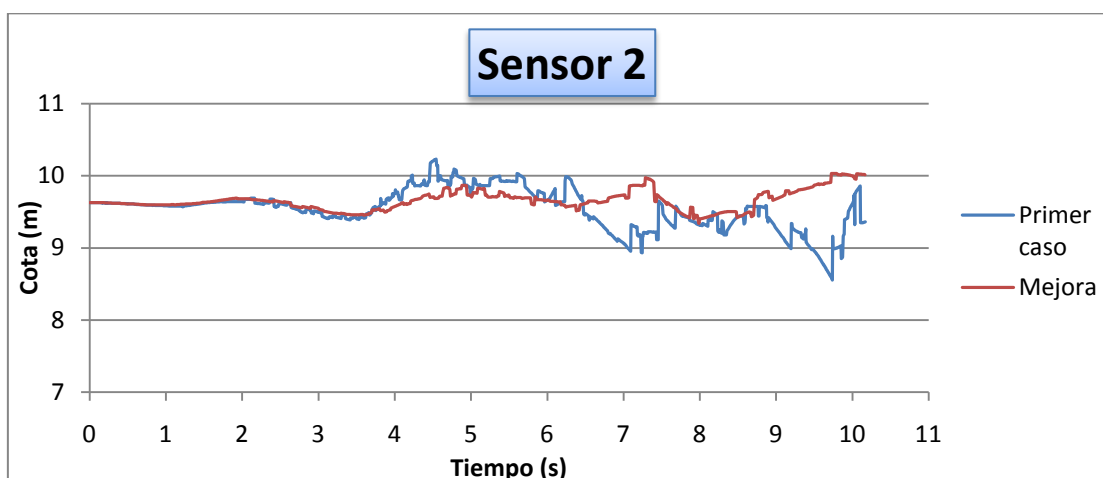


Figura 4.24. Comparativa de resultados 3D del sensor 2.

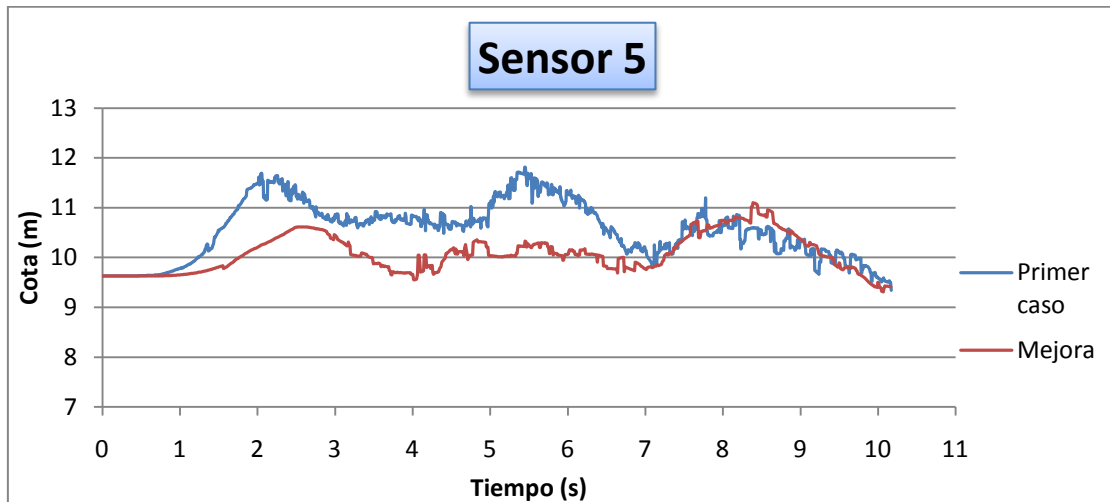


Figura 4.25. Comparativa de resultados 3D del sensor 5.

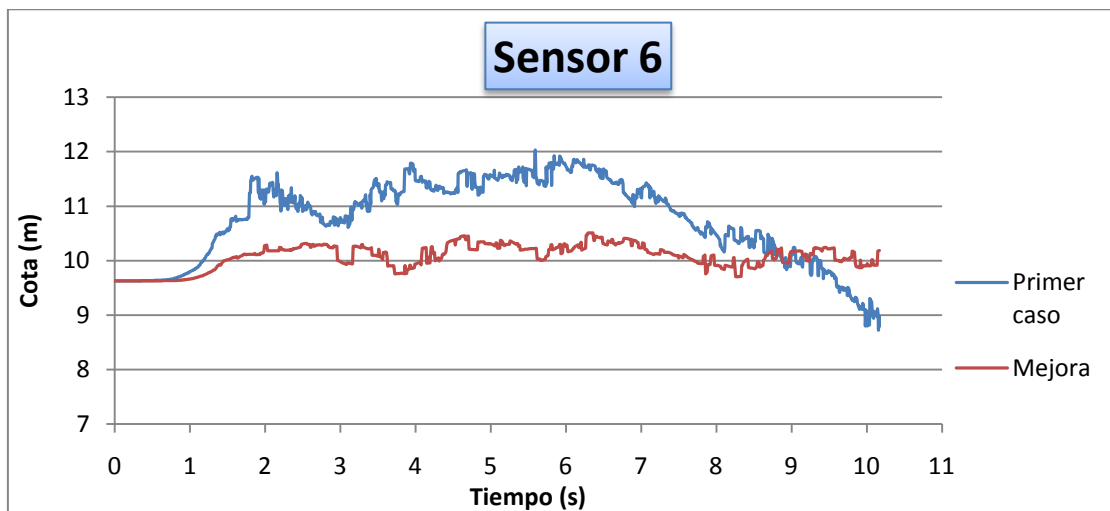


Figura 4.26. Comparativa de resultados 3D del sensor 6.

Siguiendo la lógica, una mejora en el refinamiento de la malla provoca un salto de calidad de los resultados obtenidos. En los casos anteriores, el problema mejorado marca una tendencia a seguir la cota inicial disminuyendo considerablemente la diferencia con el caso real. Sin embargo, ya se ha demostrado que no resulta suficiente ya que se sigue separando de la línea teórica de la cota inicial de la superficie del fluido del orden de 0,5 metros y no se puede permitir. Siguiendo con esta tendencia, el siguiente paso sería ejecutar el mismo problema con un refinamiento mucho mejor, disminuyendo el tamaño de malla en todas las zonas del dominio. Sin embargo, este proceso produce un elevado coste computacional y, por lo tanto, mucho tiempo para poderse llevar a cabo.



#### 4.7. CONCLUSIONES

---

Gracias a los datos obtenidos en los anteriores casos calculados podemos extraer las siguientes conclusiones:

- El PFEM es una herramienta muy útil para el estudio de rebase de puertos mediante casos bidimensionales. El comportamiento del fluido guarda mucha semejanza con lo que ocurre en la realidad.
- Las simulaciones efectuadas en tres dimensiones dicen que no se trata de un código fiable en los estudios en que intervienen geometrías muy grandes.
- Es necesario un refinamiento del mallado muy elevado para que los resultados en 3D se asemejen a los que se obtienen en 2D. Esta medida es sinónimo de un elevado coste computacional y temporal.
- El uso de mallas demasiado grandes produce la creación de pequeños huecos en el fluido. Como consecuencia, las lecturas de los sensores son erróneas ya que interpolan la cota de superficie libre con nodos que no se encuentran en la superficie.

Como conclusión final a este apartado se puede decir que el PFEM es un modo de trabajo eficaz y eficiente para geometrías reducidas en tres dimensiones como se ha demostrado en el caso del escalón de agua. Sin embargo, en el estudio de fenómenos en 3D que se producen a gran escala en el campo de la ingeniería civil como es el caso del rebase del oleaje sobre un dique, el tiempo necesario de ejecución es demasiado elevado y no resulta rentable llevarlo a cabo. Para obtener resultados similares a la simulación bidimensional, el tamaño del elemento has de ser mucho más pequeño.

Por lo tanto, para analizar el comportamiento del rebase del oleaje sobre diques de puertos haremos uso de la simulación bidimensional que proporciona el PFEM.

## *5. VALIDACIÓN DEL PFEM PARA PEQUEÑAS GEOMETRÍAS: INTERACCIÓN ESCALÓN DE AGUA – PARED*

---

### *5.1. INTRODUCCION*

---

Tal y como hemos observado, el estudio tridimensional mediante PFEM en geometrías grandes no es eficaz. Sin embargo, tal y como se había demostrado en el caso del escalón de agua en el apartado 3, cuando los dominios son más reducidos el código funciona perfectamente proporcionando unos resultados muy semejantes al caso bidimensional.

El objetivo de este apartado es corroborar que estamos en lo cierto realizando un cálculo semejante con la inclusión de un obstáculo en forma de pared. Se ha decidido este caso de estudio ya que guarda una cierta relación con la interacción ola – dique que hemos estudiado anteriormente.

Al trabajar con geometrías más pequeñas, conseguimos un mayor refinamiento del mallado de modo que se minimizan los efectos ocasionados en el estudio del puerto. De esta manera, se llevará a cabo una comparativa entre el caso en 2D y en 3D en las mismas condiciones con el objetivo de obtener un alto grado de similitud en los resultados.

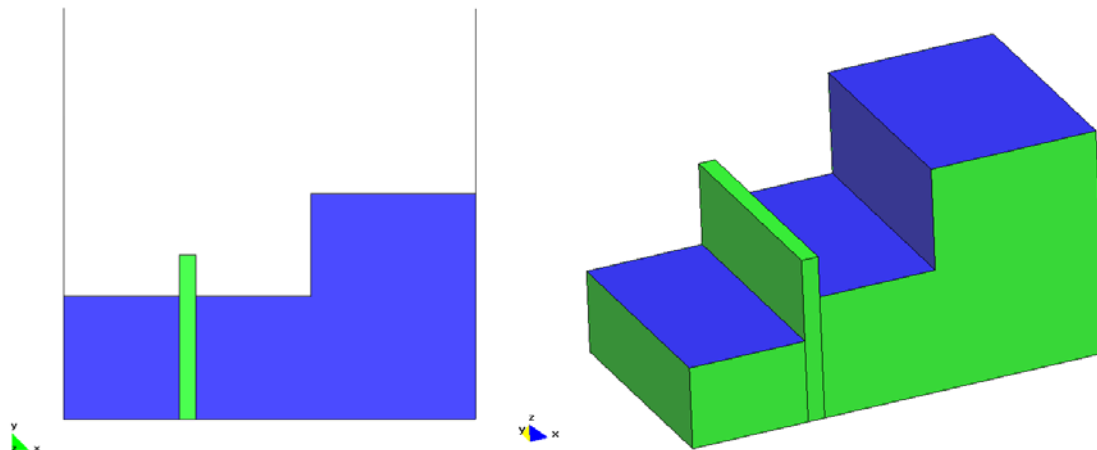
## 5.2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El caso de estudio consiste en un pequeño escalón de agua en un estado de reposo de modo que se inicie un movimiento por gravedad desde el primer instante. A diferencia del apartado 3, se ha colocado un pequeño muro en una zona intermedia que provoque la interacción con la ola generada por el escalón.

El escalón de agua tiene una longitud total de 3,4 metros y está limitado por una pared lateral fija y el muro de retención de 0,2 metros de espesor. la zona elevada del escalón se encuentra a 2,75 metros mientras que la inferior está a 1,5 metros de altura. De modo que existe un desnivel de 1,25 metros que provocará que el agua tienda a moverse.

Al otro lado del muro se encuentra un volumen de agua en reposo con una altura de 1 metro y una longitud de 1,4 metros. El contenido de esta última zona irá aumentando debido al rebase de la masa de agua colindante.

Para el caso tridimensional, se ha diseñado el mismo escalón con una profundidad de 2,75 metros. De modo que nos encontramos ante una geometría de dimensiones reducidas.



**Figura 5.1.** Diseño geométrico 2D y 3D del caso de estudio.

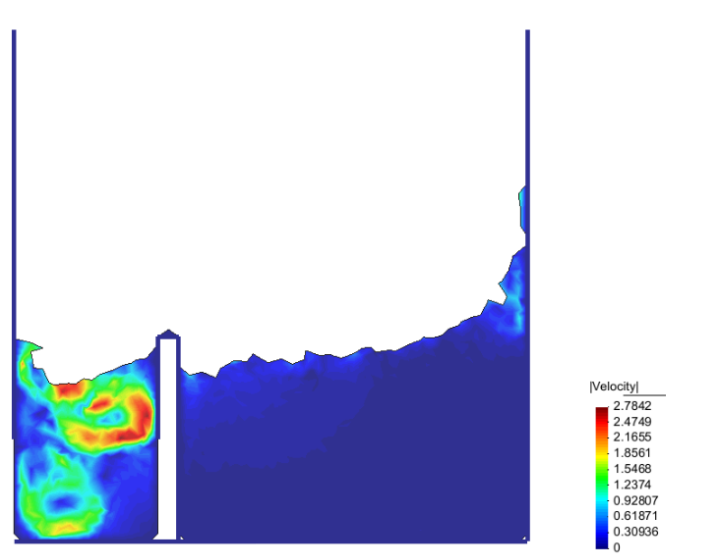
Se han colocado una serie de sensores en tres zonas del modelo. El primero de ellos se encuentra en el segundo de los volúmenes de agua, mientras que los dos restantes están en la zona baja y alta del escalón, respectivamente.

Mediante este ejemplo vamos a intentar obtener una mayor justificación referente al buen funcionamiento del PFEM en 3D cuando trabajamos con geometrías reducidas de la misma manera que se hizo previamente con el escalón de agua del apartado 3.

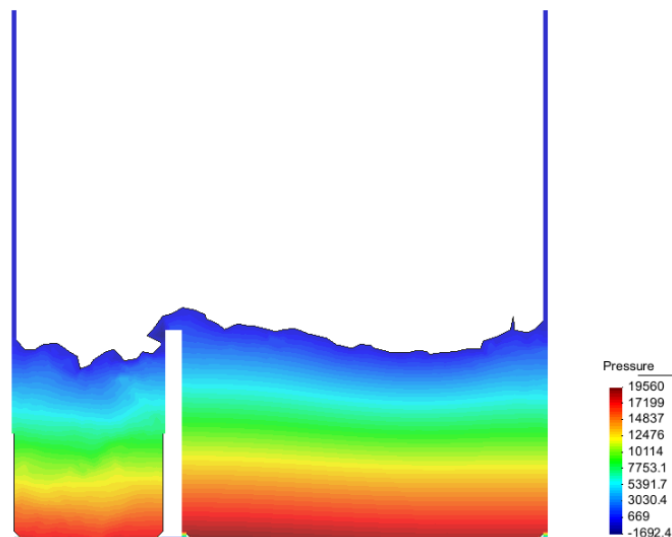
### 5.3. SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL

Para llevar a cabo la simulación del escalón interaccionando con el muro, se ha discretizado el dominio con un tamaño de malla de 0,075 metros. Se trata de un tamaño de elemento muy pequeño en comparación con el caso del puerto ya que estamos ante una geometría que tiene una longitud total de 5 metros en comparación a los 150 metros del puerto.

En las siguientes figuras se muestran algunos de los resultados obtenidos.



**Figura 5.2.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 2.40$  s



**Figura 5.3.** Perfil de la superficie libre con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 3.92$  s

Únicamente nos hemos centrado en los resultados proporcionados por los sensores, dado que es nuestra herramienta para concluir la validación del PFEM en el caso tridimensional. Las coordenadas exactas de sus respectivas posiciones se dan en la siguiente tabla.

CASO BIDIMENSIONAL		
	X (m)	Y (m)
Sensor 1	0.7	-
Sensor 2	2.3	-
Sensor 3	4.0	-
CASO TRIDIMENSIONAL		
Sensor 1	0.7	1.375
Sensor 2	2.3	1.375
Sensor 3	4.0	1.375

**Tabla 5.1.** Posición de los sensores de superficie libre

El resto de resultados referentes a los sensores se encuentran en el apartado de la comparativa expuestos conjuntamente con el caso tridimensional.

## 5.4. SIMULACIÓN TRIDIMENSIONAL

En este caso, simplemente se ha añadido a la geometría del caso de estudio una profundidad de 2,75 metros. Hemos tenido en cuenta que el objetivo era realizar una comparativa en 2D y 3D con un tamaño de elemento pequeño para que no se produjeran esas oscilaciones iniciales. Si se consigue evitar, el comportamiento tridimensional se podrá asemejar al caso bidimensional.

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos.

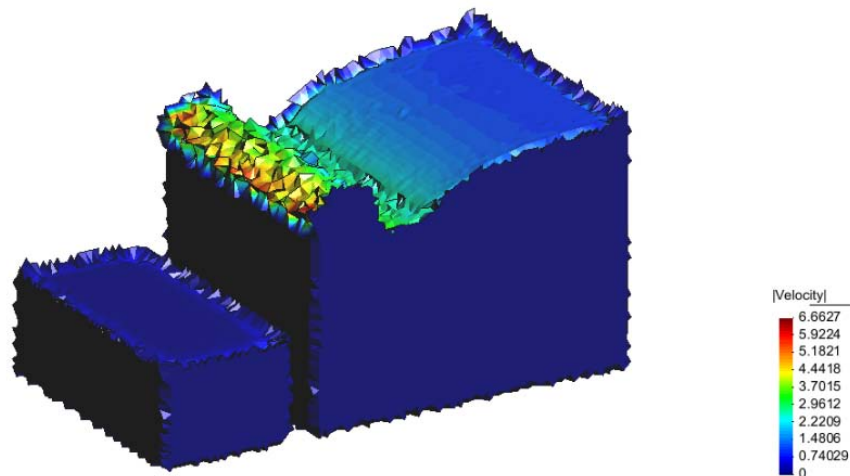


Figura 5.4. Vista tridimensional con el módulo de velocidad (m/s) para  $t = 0.38$  s

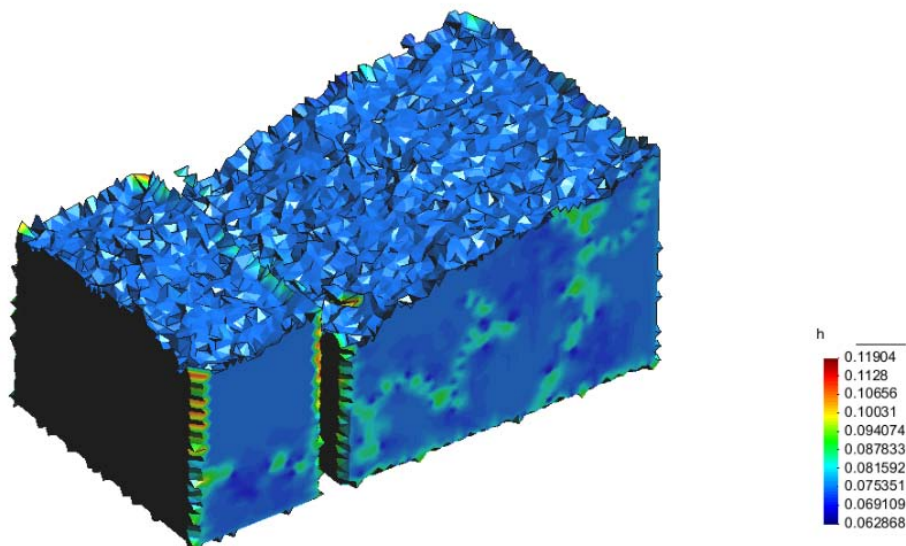


Figura 5.5. Vista tridimensional del tamaño de los elementos  $h$  (m/s) para  $t = 4.8$  s

### 5.5. COMPARATIVA ENTRE EL CASO 2D Y 3D

Este apartado se basa en contrastar los resultados de los sensores que representan el comportamiento de la superficie libre del fluido.

A continuación se exponen los resultados de los tres sensores.

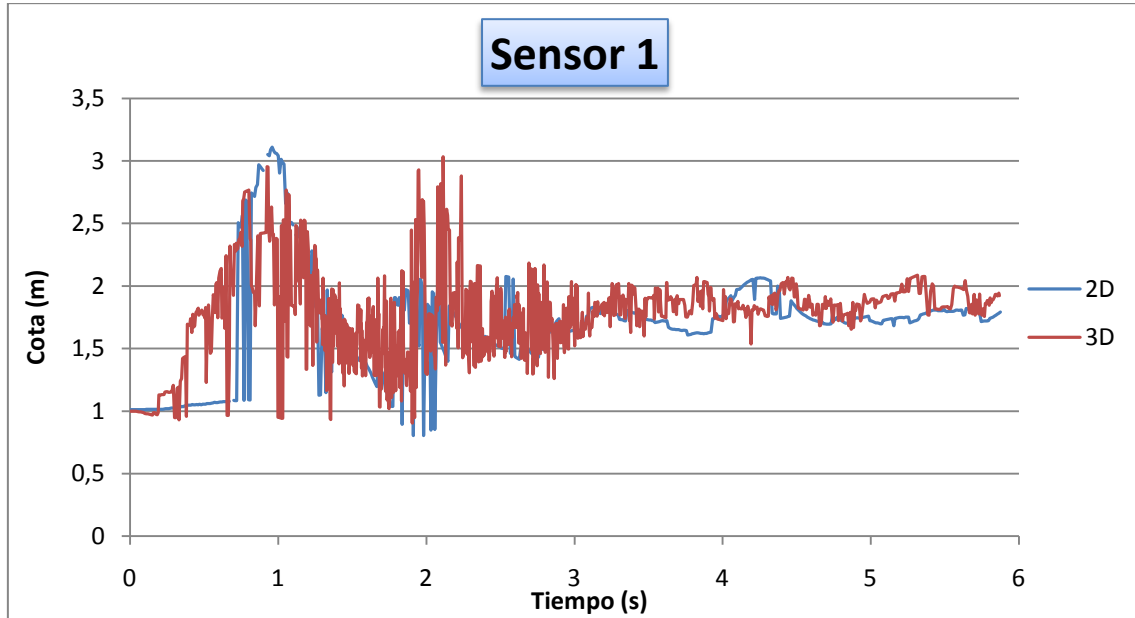


Figura 5.6. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 1.

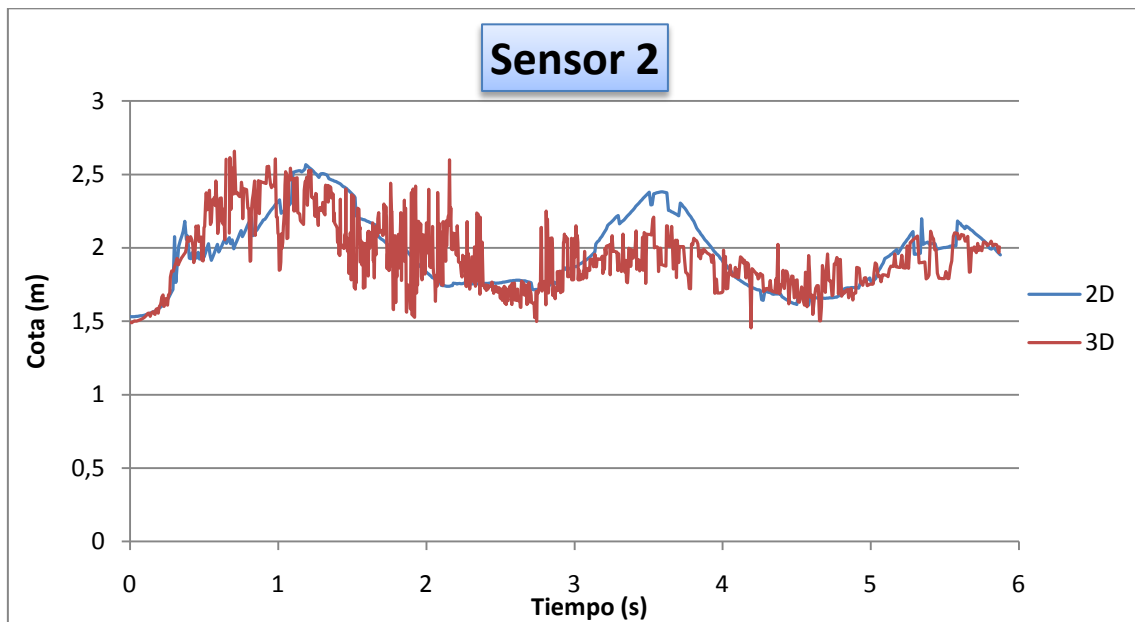
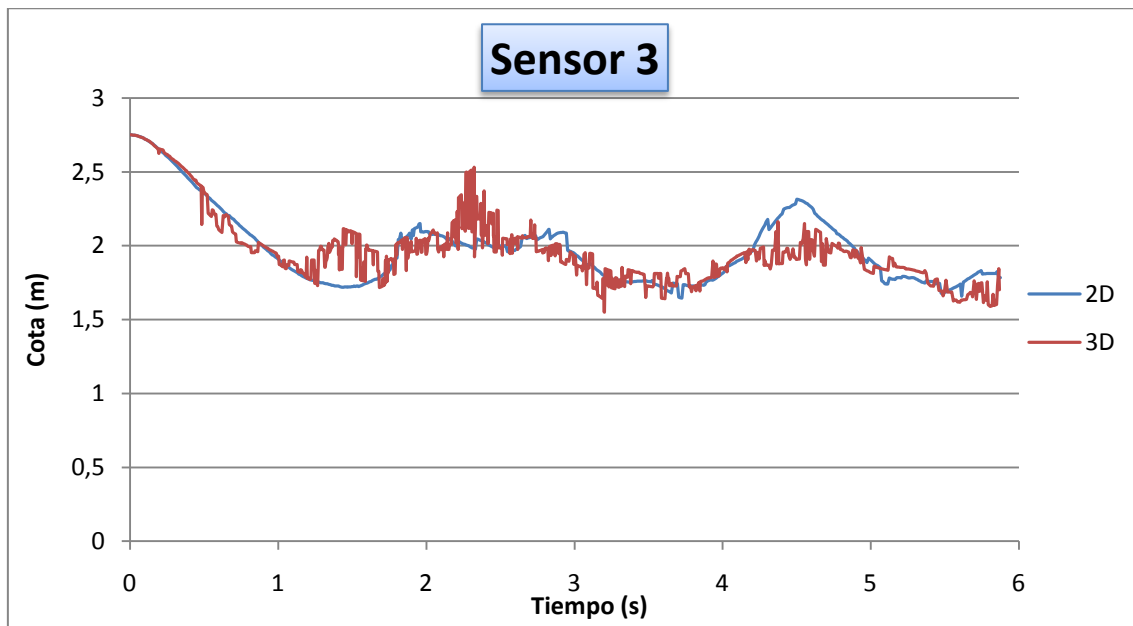


Figura 5.7. Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 2.



**Figura 5.8.** Comparativa de resultados 2D – 3D del sensor 3.

Tal y como se aprecia en las figuras anteriores, los resultados anteriores pueden catalogarse de satisfactorios. En cada uno de los tres casos se sigue una misma tendencia. El caso que puede resultar más crítico es el sensor 1. El motivo es que se encuentra en una posición que recibe de pleno el golpeo de la primera ola que interacciona con el muro. Esta es la razón por la que la superficie libre muestra esa alteración de la cota.

A continuación se extraen unas pequeñas conclusiones vistos los resultados anteriores:

- Una vez han transcurrido los tres primeros segundos de simulación, el fluido se empieza a estabilizar y la similitud entre el caso 2D y 3D cada vez es mayor.
- Este hecho demuestra que la verificación del PFEM para pequeñas geometrías sea un éxito. Los resultados se pueden catalogar como precisos y garantizan la validez del código del programa.



## 6. CONCLUSIONES

---

Las principales conclusiones generales que podemos extraer de la tesina son:

- La simulación tridimensional mediante el PFEM en casos con geometrías muy grandes muestra graves errores e imprecisiones en los resultados.
- Es necesario un elevado refinamiento del mallado en el caso 3D para que los resultados se asemejen a los que se obtienen en 2D.
- En casos de estudio donde las magnitudes geométricas sean consideradas como grandes, queda demostrado que el PFEM es una herramienta muy útil para el estudio del rebase de puertos mediante simulaciones bidimensionales. Sin embargo, al tratar pequeños dominios donde el tamaño del mallado disminuye, la simulación tridimensional proporciona unos resultados precisos y fiables.

Del capítulo 3, donde se estudia el escalón de agua, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- En primer lugar, se demuestra que el comportamiento tridimensional del escalón guarda una buena relación con los resultados obtenidos en el caso 2D, demostrando la eficacia del método.
- En un estudio tridimensional, la cota de la superficie libre se verá ligeramente mayorada debido a la presencia de un flujo transversal que se acopla al movimiento longitudinal de la onda.

Del capítulo 4 (Estudio del rebase del oleaje sobre un dique), las conclusiones más importantes obtenidas ya se han explicado al principio del apartado. No obstante, se considera importante algunos detalles ocurridos que pueden ser útiles de cara a futuros estudios relacionados con la temática de esta tesina.

- A la hora de discretizar el dominio de un fluido, se ha de elegir un tamaño de malla adecuado y el más pequeño posible. En caso contrario, se pueden crear huecos dentro del fluido que provoquen una mala lectura de los sensores de superficie libre.
- La solución de reducir considerablemente el tamaño de la malla para obtener un mayor grado de fiabilidad en los resultados de la simulación tridimensional provoca un elevado coste computacional. El tiempo necesario para llevar a cabo dicha simulación hace que se decline esta solución.

Finalmente, del quinto apartado se extraen unas conclusiones semejantes al tercer capítulo dado que el caso se ejecuta con el objetivo de comprobar que el estudio tridimensional en geometrías reducidas es válido. De todos modos, podemos concluir lo siguiente:

- La gran capacidad de resolución del PFEM para problemas en que intervienen salpicaduras de agua y separación de gotas de agua.
- La presencia de un obstáculo provoca una mayor alteración de la superficie libre. Este hecho provoca una lectura más difícil para los sensores debido a la presencia de salpicaduras y gotas de agua sueltas. Como consecuencia, los resultados se alejan de la línea teórica que marca el caso bidimensional. A pesar de todo, al tratarse de diferencias pequeñas, no implica la invalidez del método.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] R.A. Gingold and J.J. Monaghan, *Smoothed particle hydrodynamics, theory and application to non-spherical stars*, Mon. Nat. Roy. Astr. Soc., 181, (1997), 375–389.
- [2] J. Bonet and S. Kulasegaram, *Convection and stabilization of smooth particle hydrodynamic methods with applications in metal forming simulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1999).
- [3] G.A. Dilts, *Moving least squares particle hydrodynamics. i. consistency and stability*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44, (1999), 1115–1155.
- [4] S. Koshizuka and Y. Oka *Moving particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid*, Nuclear Engineering Science, 123, (1996), 421–434.
- [5] T. Belytschko, Y. Liu, and L. Gu, *Element free galerkin methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, (1994), 229–256
- [6] S. De and K.J. Bathe, *The method of finite spheres with improved numerical integration*, Computer & Structures, Vol.79, (2001), 2183-2196.
- [7] B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, *Generalizing the fem: Diffuse approximation and diffuse elements*, Computational Mechanics, 10, (1992), 307–318.
- [8] E. Oñate, S.R. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz and Taylor R.L, *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(22), (1996a), 3839–3886.
- [9] E. Oñate, S.R. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, Taylor R.L. and C. Sacco, *A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, (1996a), 315–346.
- [10] R.L. Taylor, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate, and S.R. Idelsohn, *Moving least square approximations for solution of differential equations*, Internal Report 74, CIMNE, Barcelona, Spain, (1996).
- [11] S.R. Idelsohn, M.A. Storti and E. Oñate, *Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows*, Comp.Methods Appl.Mech. Engrg. 191,(2001) 583-593.
- [12] S.R. Idelsohn, E. Oñate, N. Calvo and F. Del Pin, *The meshless finite element method*, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol 58, Issue 4, (2003).
- [13] H. Edelsbrunner and E.P. Mucke, *Three-dimensional alpha-shape*. ACM Transactions on Graphics, 3, (1994), 43–72.
- [14] Edelsbrunner, H. and Mucke, E.P. (1999). *Three dimensional alpha shapes*. ACM Trans. Graphics, 13: 43-72.

- [15] Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2003a). *The meshless finite element method*. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 58,6: 893-912.
- [16] Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2003b). *A lagrangiana meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems*. In *Computer and Structures*, 81: 655-671.
- [17] Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2004). *The particle finite element method a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves*. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, submitted.
- [18] R.Codina, *Pressure Stability in fractional step finite element methods for incompressible flows*, *Journal of Comput. Phisycs*, 170,(2001) 112-140.
- [19] Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Calvo, N. (2003c). *Polyhedrization of an arbitrary point set*. *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, 192 (22-24): 2649-2668.
- [20] E. Oñate. *A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation*. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*,2000,182:1-2,355-370.
- [21] E. Oñate *Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*,1998, 151:1-2, 233-267.
- [22] E. Oñate, *Possibilities of finite calculus in computational mechanics*. (2002) Submitted to *Int. J. Num. Meth. Engng.*
- [23] Belikov V and Semenov, A. *Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive generating isolines algorithm*. *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*, Proc. of the 6th Intl. Conf. Greenwich Univ. July 1998.
- [24] R. Radovitzky, M. Ortiz *Lagrangian finite element analysis of a Newtonian flows*. *Int. J. Numer. Engng.* 43, 607-619 (1998).